

退職記念・研究ノート

Black-Scholes モデルにおける Greeks

津野 義道

Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパ型オプションの価格過程が、各種のパラメータ、たとえば、 $t=0$ における証券価格 S_0 、証券価格のボラティリティ σ 、権利行使価格 K 等に依存する比率を求めることは、実務の観点からも重要な意義がある。この問題では、最近、Malliavin 解析を応用して“感度分析の微分公式”を導出し、その数値解は Monte-Carlo 法で求めている。Malliavin 解析の要諦は、超関数論 (Distribution Theory) と同様に、「部分積分の手法」にあるといわれている。

このノートでは、「部分積分の手法」という観点から、「Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパ型オプション」の感度分析の微分公式を導出する。Malliavin 解析は利用しないが、Malliavin-Thalmajer [1] にある例題 ([1; Ex 2.7, p. 29])、Lions-school [2,3] にある例題 (Vega) に則して解説する。次の2つを調べる。

- ・現在の証券価格 S_0 に関する感度分析 (デルタ: Δ)
- ・証券のボラティリティ σ に関する感度分析 (ベガ: Vega)

*このノートは、大学院のセミナー用に作成した資料を、ほぼそのままの形で掲載させていただいた。冗長な点も多々あるが、御寛恕をこう。また、セミナーの参加者・協同研究者である、斎藤進教授、吉原好孝氏、磯山啓明氏に感謝する。

1. 基本性質

1.1 証券の価格過程 $S(t)$ は、次の確率微分方程式に従うものとする。

$$dS(t) = \sigma S(t) dW(t) \quad (1)$$

ここで、 $\sigma (\sigma > 0)$ は証券のボラティリティと呼ばれ、価格変動の大きさを表す指標であり、 W_t は1次元の標準 Brown 運動である。この解は次になる。

$$S(t) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right) \quad (2)$$

注意 Black-Scholes モデルにおける証券の価格過程は、定数 α を用いて、次で表示されることを仮定した。 α は、当該証券の“長期期待収益率”である。

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp(\alpha t + \sigma W(t)) \\ \Leftrightarrow dS(t) &= \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式を (1) 式に帰着させる手段 (ドリフト項の処理) が、Girsanov の定理である。その結果、証券の割引価格過程がマルチンゲールになり、「リスク中立確率測度 (同値マルチンゲール測度)」が導入された。

(1) 式に現れる W_t は、同値マルチンゲール測度に関する Brown 運動である。

1.2 満期が T であるヨーロッパ型オプションの価格過程 $\{\Phi_t\}$ は、同値マルチンゲール測度を用いて

$$\Phi_t = \Phi_t(S(t)) = E[\varphi(S(T)) | \mathcal{F}_t] \quad (4)$$

で決まることを仮定する。たとえば、権利行使価格が K 円のコール・オプションでは

$$\varphi(S(T)) = [S(T) - K]^+ = \begin{cases} S(T) - K & : S(T) \geq K \text{ のとき} \\ 0 & : \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

である。

注意 この仮定 (4) は、割引率を含んでいないから、無リスク債権の利子率 r は $r=0$ としている。言い換えれば、すべての資産価値が、満期時点を基準にした“割引価値”になっていることを意味している。また、オプションの利得 $\varphi(S(T))$ が「経路」に依存しないで、満期の証券価格 $\varphi(S(T))$ のみで決定されることも意味している。さらに、 T 期における任意の利得 $\varphi(S(T))$ が、自己資金充足的な投資戦略で複製できることも、その背景にある。したがって、 t 時点でのオプション価格 Φ_t が $S(t)$ のみで決まることになる。 $\Phi_t = \Phi_t(S(t))$ の含意になる。複製可能性は、Black-Scholes の微分方程式を導出するときの基礎であった。

簡単のため、次を仮定する。

仮定 満期におけるデリバティブの利得を表す関数 $\varphi(x)$ は、 C^1 級で緩増加関数とする。

注意 コール・オプションやプット・オプションの場合は、 $\varphi(x)$ は $x=K$ の点で微分不可能になる。しかし、“ $S(T)$ が丁度 K になるような確率”は 0 になる（無視できる）から、「 $\varphi(x)$ が C^1 級の関数」という仮定は、“応用”では許容されるものと思える。しかし、超関数論では、このような関数の（一般化された）導関数には Dirac の δ 関数が出現するから、その影響は不明である。

2. 初期価格に対する感応度

2.1 直接計算による方法

オプションの Delta（初期値に関する感応度）は、 $t=0$ で考えるから、(4) 式で $t=0$ にとる。

$$\begin{aligned} \Phi_0(S(0)) &= E[\varphi(S(T))] \\ &= E\left[\varphi\left(S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)\right)\right)\right] \end{aligned} \quad (5)$$

T 時点での Brown 運動の確率密度関数 $p(T, w)$ は

$$p(T, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) \quad (6)$$

であるから、 $S(0)=x$ において、 $\Phi_0(x)$ は、次になる。

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right)\right) p(T, w) dw \quad (7)$$

・変数変換： φ の“中身”を y とおく。

$$\begin{aligned}
y &= x \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right) \\
\log\left(\frac{y}{x}\right) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) &= w
\end{aligned}$$

w を (6) 式に代入して、積分を w 変数から y 変数に変換する。

$p(T, w)$ を y 変数で表示したものを $q(T; x, y)$ と記す。

$$\begin{aligned}
q(T; x, y) &= p(T, w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

次に、 dw を dy に直す。

$$dw = \frac{1}{\sigma y} dy$$

以上の変数変換の結果、 $Q(T; x, y)$ を

$$\begin{aligned}
Q(T; x, y) &= q(T; x, y) \cdot \frac{1}{\sigma y} \\
&= \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

で定めれば、(7) 式が次で表示される。

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) Q(T; x, y) dy \tag{10}$$

注意 (9) 式は、 $\sigma = 1$ とすれば、Malliavin-Thalmaier [1: p.29] にある $p_x(y)$ 式に一致する。

オプションの Delta は、 $t=0$ でのオプション価格 $\Phi_0(x)$ の $x=S(0)$ に関する微分で定義される。

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx} \Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(T; x, y)\right) dy$$

注意 ここでは、“微分と積分の順序交換”を行っている。たとえば、 $\varphi(\xi)$ が“緩増加関数”であればよい。

ここで、次の“うまい工夫”を行う。

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(T; x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \log Q(T; x, y) \cdot Q(T; x, y)$$

Q の定義式 (9) を利用すれば、 $\log Q$ が“簡単”になる。

$$\begin{aligned}\log Q &= -\log(\sigma y\sqrt{2\pi T}) - \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \right)^2 \\ &= -\log(\sigma y\sqrt{2\pi T}) - \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right)^2 \right)\end{aligned}$$

したがって次が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \log Q = \frac{1}{xT\sigma^2} \left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \quad (11)$$

証券価格の式 (2) :

$$S(t) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right)$$

より、 $y = S(T)$ 、 $x = S(0)$ に注意すれば、次が成立する。

$$\log\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)$$

すなわち

$$\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T = \sigma W(T)$$

となるから、 $\partial \log Q / \partial x$ は、次でも表示できる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \log Q = \frac{W(T)}{xT\sigma} \quad (12)$$

●ここまでの要約

- 満期 T での利得が $\varphi(S(T))$ であるようなヨーロッパ型のオプションの、 $t=0$ での価格は、無リスク債権の利率を $r=0$ とすれば、(5) 式の Φ_0 で与えられた。

$$\Phi_0 = E[\varphi(S(T))]$$

- 変数変換により、 $\Phi_0(x)$ ($x = S(0)$) は (9) 式で表される関数 $Q(T; x, y)$ を用いて (10) 式 :

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) Q(T; x, y) dy$$

で表示された。

- オプションの Delta は、次で定義される。

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx} \Phi_0(x)$$

- Delta の計算は、 $\partial Q / \partial x$ の計算に帰着される。この計算では、次の結果が得られた。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \log Q &= \frac{1}{xT\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \\ &= \frac{W(T)}{xT\sigma}\end{aligned}$$

最後の式では、 $W(T)$ が $y (= S(T))$ に依存している点に注意する。

- 以上の結果より、 $\Delta(x, T)$ は次で表示される。

$$\begin{aligned} \Delta(x, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot \frac{1}{xT\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \cdot Q(T; x, y) dy \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot \frac{W(T)}{xT\sigma} \cdot Q(T; x, y) dy \quad (14)$$

- ここまでの結論が、Malliavin-Thalmaier [1: example 2.7] に載っている。

注意 “要約” の最後の式 (14) で、 $W(T)/xT\sigma$ を積分の外に出して

$$\frac{d}{dx}\Phi_0 = \frac{W(T)}{xT\sigma} \cdot \Phi_0$$

としてはいけない。 T 期の証券価格 $S(T)=y$ は、Brown 運動の到達点 $W(T)$ に依存している。すなわち、 $W(T)$ は y の関数である。実際、 $\frac{d}{dx}\Phi_0$ は“確率要素”のない「証券市場」から観測可能な数値である。一方、右辺の $W(T)$ は T 時点での Brown 運動がとる値であり、これは $t=0$ では観測（予測）不能な量である。

注意 Malliavin-Thalmaier [1: p. 29] では、(13) 式：

$$\Delta(x, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot \frac{1}{xT\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \cdot Q(T; x, y) dy$$

に現れる項 $w(x, y)$:

$$w(x, y) := \frac{1}{xT\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) = \frac{W(T)}{xT\sigma}$$

を“PDE weight”とよんでいる。「PDE weight の問題」は、効率的な Monte-Carlo 法の計算で重要になるらしい。Lions-school [3] で解析がなされている。

研究課題 (実証研究) Δ の表示式 (13) は次であった。

$$\begin{aligned} \Delta(x, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot \frac{1}{xT\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \cdot Q(T; x, y) dy \\ &= \frac{1}{xT\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot \log\left(\frac{y}{x}\right) \cdot Q(T; x, y) dy + \frac{1}{2x} \Phi_0(x) \end{aligned} \quad (15)$$

オプション価格 $\Phi_0(x)$, $x=S(0)$ と、その Delta $\Delta(x, T)$ は市場で観測可能であろう。そうならば、(15) 式から、証券の volatility σ が「実証的に」推定できるか。

- 実行可能か ???
- 積分核 $Q(T; x, y)$ も σ に依存している。

2.2 部分積分を用いる方法

ここでは、Black-Scholes モデルにおける $\Delta(x, T)$ を“部分積分”を用いて計算し、(14) 式を別の方法で導出する。

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx} E[\varphi(S(T))], \quad x=S(0)$$

価格過程 $S(t)$ は、(2) 式より次であった。

$$S(t) = x \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right)$$

したがって、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dx} S(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right) \quad (16)$$

• $\varphi(X)$ の微分を $\varphi'(X)$ と記す。

$$\frac{d}{dX} \varphi(X) = \varphi'(X)$$

• $x = S(0)$ として、 $\varphi(S(t))$ を x で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \varphi(S(T)) &= \varphi'(S(T)) \cdot \frac{dS(T)}{dx} \\ &= \varphi'(S(T)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)\right) \end{aligned} \quad (17)$$

• Malliavin 微分にならって、 $\varphi(S(t))$ を $w (= W(t))$ で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \varphi(S(t)) &= \frac{d}{dw} \varphi\left(S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w\right)\right) \\ &= \varphi'(S(t)) \cdot S(0) \cdot \sigma \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w\right) \end{aligned}$$

この式で、 t に T を代入すれば、次が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) &= \varphi'(S(T)) \cdot S(0) \cdot \sigma \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)\right) \\ &= x\sigma \cdot \varphi'(S(T)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

(17) 式と (18) 式より、次がわかる。

$$\frac{d}{dx} \varphi(S(T)) = \frac{1}{x\sigma} \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \quad (19)$$

(19) 式を用いて、(14) 式とは別に、 $\Delta(x, T)$ の表示式が得られる。

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx} E[\varphi(S(T))] = E\left[\frac{d}{dx} \varphi(S(T))\right] = E\left[\frac{1}{x\sigma} \cdot \frac{d}{dw} \varphi(S(T))\right] \quad (20)$$

注意 Malliavin-Thalmaier [1] の 1.2 節, 1.3 節では、 d/dw を D_t と記し、一般の $\psi(W)$ に対する“微分 $D_t \psi$ ”を定義している。その方法は、区間 $[0, T]$ を 2^n 等分分割 (Dyadic Filtration) して、 $\psi(W)$ を“折れ線”で近似し、“増分に関する微分”を考えることになされている。さらに、“ベクトル場”

$$Z = \frac{1}{x\sigma} \int_t^{\cdot} D_t$$

を用いて、(20) 式を次で表示している。

$$\Delta(x, T) = E[Dz\varphi(S(T))]$$

このベクトル場 Z を、Malliavin-Thalmaier [1] では “smearred vector field” とよんでいる。

$\Delta(x, T)$ の表示式 (20) は、次を意味する。

$$\Delta(x, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x\sigma} \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) dw \quad (21)$$

(21) 式を「部分積分」する。 $\varphi(\xi)$ が “緩増加関数” であれば、 $w \rightarrow \pm\infty$ としたとき $|S(T)| \leq \text{const} \cdot e^{\sigma|w|}$ であるから、部分積分における “完全積分項” が 0 になる。「 $\varphi(\xi)$ が “緩増加関数” である」という仮定は、2.1 節の「直接計算による方法」でも利用された。

(21) 式の「部分積分」を実行する。

$$\begin{aligned} \Delta(x, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x\sigma} \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) dw \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{x\sigma} \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) \right) dw \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{1}{x\sigma} \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) \cdot \left(-\frac{w}{T}\right) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{w}{x\sigma T} \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) dw \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式は、次のように書き換えられる。

$$\Delta(x, T) = E \left[\varphi(S(T)) \frac{W(T)}{x\sigma T} \right] \quad (23)$$

注意 $\Delta(x, T)$ の表示式 (23) は、「直接計算」で得られた表示式 (14) に一致している。この式が、Malliavin-Thalmaier [1] の (2.28) 式 (p. 35) である。

3. ボラティリティーに関する感応度

Black-Scholes モデルにおけるオプションの、ボラティリティーに関する “感度 (微分)” は Vega と呼ばれる。モデルでは、ボラティリティー は一定 (定数) とする。

3.1 直接計算による方法

Black-Scholes モデルに現れるパラメータは定数であるから、*greeks* が直接計算できる。その手法は Delta の場合と同様である。2 節から、以下を抜粋する。

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) Q(T; x, y) dy \quad (24)$$

ここで、 $Q(T; x, y)$ は次である。

$$\begin{aligned} Q(T; x, y) &= \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi T}} \exp \left(-\frac{1}{2T} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\log y - \log x + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (25)$$

オプションの Vega は、次の計算である。

$$V(x, T) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_0$$

“Delta” の場合と同様に、次を利用する。

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} Q(\sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \log Q(\sigma) \cdot Q(\sigma)$$

“Delta” の場合に $\log Q$ を計算した。

$$\log Q = -\log(\sigma y \sqrt{2\pi T}) - \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\log y - \log x + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right)^2 \right)$$

この式より、 $\partial(\log Q)/\partial \sigma$ が “楽に” 計算できる。計算の途中で、Delta のときに用いた次の関係を利用する。

$$\log y - \log x + \frac{1}{2} \sigma^2 T = \sigma W(T)$$

途中を省略して、結果は次である。

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log Q = \frac{1}{\sigma T} (W^2 - \sigma T W - T)$$

以上より、Vega の公式が得られる。

$$\begin{aligned} V(x, T) &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \frac{\partial Q}{\partial \sigma} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \sigma} \log Q(\sigma) \cdot Q(\sigma) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \cdot \frac{1}{\sigma T} (W^2 - \sigma T W - T) \cdot Q(\sigma) dy \\ &= \frac{1}{\sigma T} \cdot E[\varphi(S(T)) \cdot (W(T)^2 - \sigma T W(T) - T)] \end{aligned} \tag{26}$$

3.2 部分積分を利用する方法

Black-Scholes モデルにおける価格過程の確率微分式：

$$dS(t) = \sigma S(t) dW(t)$$

で σ を $\sigma + \varepsilon$ に置き換えた価格過程を S_ε と記せば、 S_ε をあらわす確率微分方程式は、次になる。

$$\begin{aligned} dS_\varepsilon &= (\sigma + \varepsilon) S_\varepsilon dw \\ &= \sigma S_\varepsilon dW + \varepsilon S_\varepsilon dW \end{aligned} \tag{27}$$

注意 Malliavin-Thalmaier [1] では、この式から $\Psi = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} S_\varepsilon$ がみたすべき確率微分方程式を求めて、それを解いている。

このノートでは、直接 (27) 式を解く方法をとる。(27) 式の解は次である。

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma + \varepsilon)^2 t + (\sigma + \varepsilon)W(t)\right) \quad (28)$$

(28) 式を ε で微分すれば、次が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} S_\varepsilon(t) &= S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right) \times (-\sigma t + W(t)) \\ &= S(t) \times (W(t) - \sigma t) \end{aligned}$$

注意 この式が、Malliavin-Thalmaier [1] の p. 36 の「下から 9 行目」にある。

$$\Psi(t) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} S_\varepsilon(t) = S(t) \cdot (W(t) - \sigma t)$$

Malliavin-Thalmaier [1] から離れて、先へ進む。

満期 T で、そのときの利得が $\varphi(S(T))$ であるヨーロッパ型オプションの Vega を計算する。求めるべき式は、次である。

$$V(x, T) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E[\varphi(S_\varepsilon(T))] = E\left[\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi(S_\varepsilon(T))\right] \quad (29)$$

$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi(S_\varepsilon(T))$ の計算を行う。

• 直接計算

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi(S_\varepsilon(T)) &= \varphi'(S(T)) \times \frac{d}{d\varepsilon} S_\varepsilon(t)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \varphi'(S(T)) \times (S(T) \cdot (W(T) - \sigma T)) \end{aligned} \quad (30)$$

• 2.2 節と同様にして、 $\varphi(S_\varepsilon(t))$ の “Malliavin 微分 $D_t\varphi$ ” を求める。 $D_t\varphi$ は、このような簡単な例では、 $\varphi(S_\varepsilon(t))$ を $w (= W(t))$ で微分することである。微分した後で $\varepsilon=0$ を代入するのが本当であるが、 ε は $W(t)$ の係数に入っているから、はじめから $\varepsilon=0$ として計算する。 $\frac{d\varphi}{dw}$ は、Delta の所の計算が利用できる。

$$\frac{d}{dw} \varphi(S(T)) = \varphi'(S(T)) \times (\sigma \cdot S(T)) \quad (31)$$

• (30)、(31) より、次がわかる。

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi(S_\varepsilon(T)) = \frac{W(T) - \sigma T}{\sigma} \cdot \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \quad (32)$$

(32) 式を (29) 式へ代入すれば、次が得られる。

$$V(x, T) = E\left[\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi(S_\varepsilon(T))\right] = E\left[\frac{W(T) - \sigma T}{\sigma} \cdot \frac{d}{dw} \varphi(S(T))\right] \quad (33)$$

注意 Malliavin-Thalmaier [1] の記法では、ベクトル場 Z を

$$Z = \frac{1}{\sigma} \int_t^T (W(t) - \sigma t) D_t$$

で定めたとき、(33) 式は、 $t=T$ で、次が成り立つことを意味しているようである。

$$V(x, T) = E[D_Z(\varphi(S(T)))] = E[D_Z\Phi]$$

Malliavin-Thalmaier [1] の p. 37、上から 2 行目、4 行目に次の式がある。

$$V(x, T) = E [D_{x/z} \Phi], \Phi = \varphi(S(T))$$

$$D_{x/z}(W(T)) = \frac{f}{\sigma} \left(= \frac{W(T) - \sigma T}{\sigma} \right)$$

Malliavin-Thalmaier の方法では、残りの課題は、 D_z の共役作用素 $v(Z)$ を部分積分の方法で求めることになる。

$$V(x, T) = E [D_z \varphi(S(T))] = E [\varphi(S(T)) \cdot v(Z)]$$

このノートでは Malliavin-Thalmaier [1] によらないで、(33) 式を直接、部分積分する。

(33) 式は、次を意味する。

$$\begin{aligned} V(x, T) &= E \left[\frac{W(T) - \sigma T}{\sigma} \cdot \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{w - \sigma T}{\sigma} \cdot \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \right) \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) dw \end{aligned} \quad (34)$$

(34) 式の部分積分では、次を計算することになる。

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dw} \left\{ \frac{w - \sigma T}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) \right\} \\ &= -\frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) - \frac{w - \sigma T}{\sigma} \cdot \left(-\frac{w}{T}\right) \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) \\ &= \left\{ -\frac{1}{\sigma} + \frac{w(w - \sigma T)}{\sigma T} \right\} \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) \\ &= \frac{1}{\sigma T} \cdot (w^2 - \sigma T w - T) \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) \end{aligned} \quad (35)$$

部分積分では、Delta の場合と同様に「完全積分項」は 0 になる。(34) 式を部分積分すれば、次が得られる。

$$\begin{aligned} V(x, T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{w - \sigma T}{\sigma} \cdot \frac{d}{dw} \varphi(S(T)) \right) \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{1}{\sigma T} \cdot (w^2 - \sigma T w - T) \exp\left(-\frac{1}{2T} w^2\right) dw \\ &= \frac{1}{\sigma T} \cdot E [\varphi(S(T)) \cdot (W(T)^2 - \sigma T W(T) - T)] \end{aligned} \quad (36)$$

この式は、直接計算で得られた結果 (26) 式に一致する。

注意 Vega の微分公式 (26) = (36) は、Lions-school [2] の p. 405、上から 9 行目にある結果に一致する。Lions たちは、Malliavin 解析を用いてこの式を導出している。

参考文献

- [1] P. Malliavin-A. Thalmaier, *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*, 2006, Springer
- [2] E. Fournié-J. M. Lasry-J. Leburchoux-P. L. Lions, *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance*, Finance and Stochastics **3** (1999), 391-412
- [3] E. Fournié-J. M. Lasry-J. Leburchoux-P. L. Lions, *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II*, Finance and Stochastics **5** (2005), 201-236