

おもしろ経済うつくし数学[†]

竹 田 陽 介^{*}

概要

経済学との邂逅、数学の魅力について経験を語りながら、経済学が社会問題の解決に役立つための指針を探し究める。

キーワード：バブル、一般均衡理論、合理的期待形成、比較静学、フィリップス曲線

I おもしろ経済学

わたしが22歳の大学生であったとき、経済学に出会いました。大学三年生で演習（ゼミ）を選択する時期となり、経済学について主体的に考えるようになりました。たまたま立ち寄った古本屋で、岩波新書の中から手に取った本が、宇沢弘文『自動車の社会的費用』という本でした。アメリカでの研究生活から帰国したばかりの著者が、自宅のあった東京の近郊の街で、身体すれすれに乗合バスが通り過ぎる際に感じた危険について疑問をいただいたことから始まります。身近に存在するが、特段疑問もいだかない問題が、「社会的費用」と呼ばれる概念で記述され、解決法が探られるという実践的な学問との邂逅でした。

著者である宇沢弘文という人はどんな人だろう。探してみると、大学生の時代に数学を専攻していた；その後アメリカに渡り、ケネス・アローというノーベル賞を受賞した偉大な（当時偉大さを理解できていたはずはありませんが）経済学者に見出された；経済成長論というマクロ経済学の分野で世界的に認められる業績を遺した；シカゴ大学の教員であったとき、米国のベトナム戦争遂行に反対したりベラル派に与していた；日本に帰国後、『自動車の社会的費用』をはじめ、水俣病など当時の日本における公害、成田空港の開港前の用地撤収に伴う成田闘争など、社会問題の調停に積極的にコミットしてきた、というおぼろげな印象をいただきました。

その宇沢先生が何と、わたしの所属していた東京大学経済学部の教授としておられたことに気付いたのは、その後でした。古本屋を漁ると、宇沢先生に纏わる書籍がいくつか発見され、経済成長論という正統的なテーマに関する権威が、公害や成田闘争などの社会問題にコミットするという違和感からか、多くの批判に晒されていることも判りました。例えば、宇沢には哲学がないとか、経済学に背く行為を冒しているなどでした。おそらく宇沢先生のお耳にも届いていたであろうこれらの批判は、これから経済学と正面切って向かい合おうというわたしにとって、経済学

[†] このエッセイは、上智大学2010年度教育イノベーション・プログラム「初年次生向けのミクロ・マクロ経済学および計量経済学の理解を助ける数学の教育のための教材および学習支援プログラムの開発」のために準備された。コメントを下された出島敬久教授、打田委千弘教授（愛知大学）に感謝する。

^{*} 上智大学 経済学部 経済学科
連絡先 E-mail : y-takeda@sophia.ac.jp

の魅力が益々掻き立てる効果がありました。きっと宇沢先生は、その答えをもっておられるであろう、そう思い込んだのでした。

ゼミの説明会に行くと、白い髭と仙人のような風貌の大男が颯爽と登場し、何かをしゃべり始めました。内容をはっきりとは覚えていませんが、なぜ経済学を学ぶのかについて語られたのかもしれない。何しろ、これがあの宇沢かと、眼をパチクリして舞い上がっていたわたしでしたから、話の内容より、この人自体にすべての関心が向かっていたはず。さまざまな批判に晒されながらも、決然と行動を起こす（そうに違いない）そのお姿を垣間見て、この人のような人でなく、この人自身になりたい、そう願った瞬間が訪れました。今から考えますと、「師」との出会いとはそういうものらしいです。学びとは、この師こそ必ず答えをもっているはずであると、弟子が勝手に思い込むことから始まるものだ。宇沢先生も愛した赤塚不二夫や藤子不二雄などトキワ荘に集った金の卵が、こぞって手塚治虫という巨人に向けたまなざしのように、です。

ゼミが始まりました。午後3時から始まるゼミでは、毎年読む論文が決まっており、当時はジョージ・アカロフの「レモン・マーケット」、マイケル・スペンスの「ジョブ・マーケットにおけるシグナリング」、小谷清の「不均衡動学」、ジャン・ティローの「バブル」、そしてハリソンとクレプスの「投機的バブル」の論文でわたしは、ハリソン＝クレプスの論文の報告を担当させられました。この論文は、投資家が異質な（情報でも Belief でも）期待形成を行うときに、どのようなメカニズムで資産バブルが発生するかを、数学的に厳密に示した論文です。今の基準で言いますと、「ファイナンス」の分野に入る古典的な論文です。ファイナンスを専攻する学者によりますと、1970年代に書かれたハリソン＝クレプスは今でも、アクセスし易いように見えるが、実は極めて難解な論文として知られているそうです。ゼミでわたしの担当が回ってきました。皆目理解できません。全く分からないのです。

$$P_t(x_t) = \maxsup_{a \in A} E^a[\gamma d_{t+1}(x_{t+1}) + \gamma P_{t+1}(x_{t+1}) | \chi_t = x_t] \text{ for } \forall t, \forall x_t$$

こんな感じです。そんなには長文ではないし、書かれた英語は辿れるけれど、紙を覆う数式の数々がいったい何を意味しているのか、何のために提示されているのか、こんなこと理解することに意味があるのか、自問自答しながらの日々が二三カ月続きました。ゼミは、毎週午後3時に始まり、こんな体たらくですから、ゼミ室に掛かる時計の針が午後4時を回る前までに、宇沢先生の方から「じゃあ、この辺で」という言葉が飛び出す始末でした。近くの居酒屋でしょげかえりながら、痛飲していたことを思い出します。そのさ中、ゼミの合宿で乗鞍岳に行き、寮でハリソン＝クレプスの続きを報告することになりました。おそらくゼミの先輩、同僚は今日も一時間持つまいと期待（早く飲みたい！）していただろうと思います。ところが、ここ三カ月ずっと、「読めなかった」数式が、そのときに限って、読めたんです、なぜか。そして難解な数式の展開をすらすらと解いていくことができました。宇沢先生もそのことに驚かれたのか、「君、よく解けたね」と一言おっしゃいました。何のことはない、高校数学で学んでいた「漸化式」に過ぎなかったのですが、そうだと知るまでに紆余曲折があった訳です。わたしはそのとき、標高1700メートルを超える乗鞍の山の中で、天にも昇る気分を味わいました。そのときはじめて、「経済学はおもしろい」と心底感じました。

II うつくし数学

宇沢先生に魅せられて経済学をおもしろいと感じるようになりましたが、当然のことながら、宇沢先生ひとりが経済学を構築してきた訳ではありません。世の中には、いろいろな経済学があることを知るの、大学院に入学したのちでした。経済成長論に代表されるマクロ経済学のみならず、一般均衡理論やゲーム理論に見られるミクロ経済学もあれば、コンピューターを用いて統

計学的手法を適用する計量経済学もあります。これらは本来、学部生のときにそれぞれの専門家の先生方の授業を聴き、基本的な知識を身に付けておくべき素養だったと、後になって反省しました。大学院に入学後は、これらの未知の分野について、キャッチアップしなければドロップアウトしてしまいます。一生懸命、勉強しました。特に、当時マイクロ経済学を教えられていた根岸隆先生が、御自分の教科書『マイクロ経済学講義』（東京大学出版会）を用いて一般均衡理論を詳しく講義されたのが、幸いでした。なぜなら、そこで展開される数式が、きわめてうつくしかったからです。

一般均衡理論とは、経済変数の間の相互依存関係に関する因果法則を樹立することを目的として、ワルラスら古典派経済学者がうちたてた理論です。根岸先生によれば、「一般均衡理論は、ポパーが社会科学の真の目的としたものを追求している。それは彼が社会陰謀説とよぶものの正反対であるからである。社会でおこることは、いずれもある強力な個人ないしグループが企てた陰謀の直接的結果であると考えてはならない。社会科学の主要な仕事は、社会現象はいずれも多くの個人の意図的な行動の相互作用による意図せざる社会的な結果であることをあきらかにすることである」ります。いまでは、マイクロ経済学の一分野となってしまった一般均衡理論では、社会と個人の相互作用が明示的に、かつ理論的に表現される点で、社会科学の面目躍如たる威容を示しています。

「市場における価格が所与のとき、企業がどのように消費者財と中間生産物を供給し、生産要素と中間生産物を需要するか」、一方、「市場価格を所与として、消費者がどのように消費者財を需要し、生産要素を供給するか」、これらすべてを考察するのが、一般均衡理論です。そこでは、「それぞれの財の総需要と総供給とは、競争的な企業と消費者が所与とみなす価格の関数であり」、「これらの市場価格は、あらゆる財の総需要と総供給とを等しくさせるように決定され」、「競争的経済の一般均衡とは、すべての財の市場において需要と供給が均等化するような価格の組合せであります」。

この体系をどう表現するか。掻い摘んで見せます。 m 個の財があります。第 j 番目の財の価格が p_j です。企業は r 個あり、第 k 番目の企業の第 j 番目の財の産出ないし投入が y_{kj} です。生産関数 $f_k(y_k) = 0$ の制約の下で利潤 $\pi_k = \sum_j p_j y_{kj}$ を最大化する企業 k の各財の産出ないし投入は、 $y_k = (y_{k1}, \dots, y_{km})$ です。一方、消費者は n 人おり、第 i 番目の消費者の第 j 番目の財の消費量が x_{ij} 、初期保有量が \bar{x}_{ij} です。第 k 番目の企業の第 i 番目の消費者への利潤の分配（配当）の率が d_{ki} です。 $\sum_i d_{ki} = 1$ の関係もちます。予算制約 $\sum_j p_j x_{ij} = \sum_j p_j \bar{x}_{ij} + \sum_k d_{ki} \left(\sum_j p_j y_{kj} \right)$ の下で効用 $U_i(x_{i1}, \dots, x_{im})$ を最大化する消費者 i の各財の消費量は、 $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$ です。このとき、一般均衡において価格体系 $p = (p_1, \dots, p_m)$ が満たす条件は、各財の超過需要がゼロに等しくなる

$$\sum_i x_{ij}(p) - \sum_k y_{kj}(p) - \sum_i \bar{x}_{ij} = 0 \quad \text{for } \forall j = 1, \dots, m \quad (1)$$

です。

全部で m 個の方程式が、 m 個の未知数 p を決定するようには見えますが、すべての m 個の財の価格を比例倍しても需要 $x_{ij}(p)$ と供給 $y_{kj}(p)$ は不変であるという需要関数、供給関数の価格 p に関する 0 次同次性から、決定されるのは、 m 個の財の絶対価格ではなく、 $m - 1$ 個の相対価格になります。もし m 個の方程式がすべて独立であるなら、決定される相対価格の数が過少になり、過剰決定となります。実は、 m 個の方程式のうち独立なのは、 $m - 1$ だけです。なぜなら、恒等式として、ワルラス法則

$$\sum_j p_j \left(\sum_i x_{ij}(p) - \sum_k y_{kj}(p) - \sum_i \bar{x}_{ij} \right) = 0 \quad (2)$$

が成立するからです。ワルラス法則は、消費者の予算制約式 $\sum_j p_j x_{ij} = \sum_j p_j \bar{x}_{ij} + \sum_k d_{ki} \left(\sum_j p_j y_{kj} \right)$

から導出されます。すべての消費者の予算制約式を合計すると、 $\sum_i d_{ki} = 1$ より

$$\sum_i \left[\sum_j p_j x_{ij} - \sum_j p_j \bar{x}_{ij} - \sum_k d_{ki} \left(\sum_j p_j y_{kj} \right) \right] = \sum_j p_j \left(\sum_i x_{ij} - \sum_k y_{kj} - \sum_i \bar{x}_{ij} \right) = 0$$

ワルラス法則が成立します。よって、 $m - 1$ 個の独立な方程式が、 $m - 1$ 個の未知数を一意に決定する一般均衡理論が完成します。

ワルラスの一般均衡理論がうつくしい理由は、この体系が需要と供給が一致しない不均衡の状態において、どのように均衡に達することができるかを、ワルラス自身が、「模索過程」(タトマン)として示したことにもよります。また、もうひとつの理由として、一般均衡において決定される $m - 1$ 個の相対価格のみならず、 m 個の絶対価格がどのように決定されると考えられるについても、理論的な方向性を示したことも挙げられます。とりわけ、後者は、一般均衡理論の中では、明示的には取り扱われていない財、つまり「貨幣」の存在が、絶対価格の決定にとって必要不可欠であることを意味し、貨幣を含んだ「マクロ経済学」への発展性の基礎となりました。すばらしくうつくしい数学の下で、おもしろい経済学が育まれたと言って良いでしょう。

III うつくしい経済学

こうして個人的には恵まれた経済学との邂逅があったわたしが、爾来25年のキャリアを経て、「うつくしい経済学」として皆さんに推奨したいアイデアが三つあります。それらについて、「経済学と数学の関係」の観点から述べていきます。三つのアイデアとは、「合理的期待形成」という仮説、「比較静学」という時間の分析方法、「フィリップス曲線」というマクロ経済の法則です。本節では、それぞれのアイデアとしての歴史、適用例、発展について述べて行きます。

1. 合理的期待形成

予測市場 (Prediction markets) と呼ばれる市場があり、米国を中心に予測の売買が行われています。例えば、州や地方レベルの選挙結果、スポーツ・イベント、映画の興行成績・受賞、科学技術・技術革新・医薬効果など幅広く、事の成否に纏わるいわゆる「賭け」に属する取引です。しかし、より専門的知識を要する取引もあり、消費者物価指数など頻繁に公表されるマクロ経済指標に関しても、予測の売買が行われている。予測を売る人は、自分のもっている専門的知識を使って、より精度の高い予測を行い、それを売ることによって収入を得る一方、予測を買う人は、わざわざさまざまな情報を仕入れたり、仕入れた情報を抽出し、加工するコストをかけずに、より高い専門的知識をもつ予測者による予測を買うことで、将来に関する正確な見通しを得ることができます。

株式の売買、FX取引などを考えれば明瞭ですが、予測の成否は、利益に関わります。何度も何度も挑戦し、失敗を重ねていけば、そのうち予測の精度が上がっていく事象もあるでしょうし、何度やっても一向にコツをつかめない事象もあるでしょう。また、予測が思い入れや過去のしがらみに左右されてしまい、予測が主観的になりがちなものもあれば、まわりの人や環境をよく観察しながら、客観的な予測ができる人もなかにはいるでしょう。予測ほど、事象や人によってマチマチなこともないかもしれません。

企業や消費者の意思決定に大きな影響を及ぼす予測=期待 (Expectations) について、経済学は「合理的期待形成」(Rational Expectations) という仮説を用いてきました。どういう意味で合理的であるかと言うと、予測を行う主体が各時点において最大限獲得できる情報をすべて用いて、ある事象がどうなるかについて「期待値」を計算する、という意味です。この合理的期待形成仮説に従えば、消費者の最適な消費量の決定に関する「恒常所得仮説」や、株式市場などの資産市場における最適な情報処理に関する「効率市場仮説」など、「最適性」を伴う仮説・命題を導く

ことができる点で、きわめて便利な仮説です。恒常所得仮説によれば、明らかに一時的に発生したと判断される、つまり将来二度と起こるとは合理的には考えられない所得、たとえば宝くじの一等賞に当たるなどの事象に対して、賞金を消費に回すことはなく、将来のための貯蓄に全額回すことが最適な消費決定となります。また、効率市場仮説によれば、ある企業の経営計画に関する内部情報（インサイド・インフォメーション）は既に株価に反映されているはずですから、内部情報を用いた当該企業の株式売買に伴って、超過利益を上げることはできません。

もちろん、現実には、実際の予測市場に見られるように、すべての消費者・企業などが合理的に期待形成しているとは言えません。誰でも宝くじに当たれば、家族旅行にでも行ってパアッと浪費するでしょうし、インサイド・インフォメーションで不正な利益を得る投資家は後を絶ちません。合理的期待形成仮説は、あくまでも合理性の基準を満たす主体による最適化行動をベンチマークとして導出するための仮説のひとつに過ぎません。

2. 比較静学

わたしたちは「時間」のなかで生きています。時間をどのように表わすかは、学問領域によってマチマチです。野口悠紀雄『天使の出現』（日本経済新聞社）には、時間をめぐるさまざまな逸話が語られており、読者に知的刺激を与えてくれます。そのなかで、経済学における時間、とりわけ「時間選好率」という概念に関して、20世紀初頭のケンブリッジ大学において論争が起きた事例が述べられています。論争の主は、マクロ経済学という分野を切り拓いた嚆矢と言える『雇用・利子・貨幣の一般理論』の著者ケインズ、およびケインズの弟子であったフランク・ラムゼイの二人でした。

ケインズは、『一般理論』のなかで、「人生は長いものではなく、人間の本性は性急な結果を欲している」、「長期にはわれわれは皆死ぬ」と述べ、「資本蓄積量が一定とみなせる短期間において、不確実な将来に対する人々の予想が不安定に変動するとき経済がいかに変動するかを扱って」（野口）ます。一方、ラムゼイは、「ケインズとは正反対に、短期的変動には興味を示さず、資本蓄積などの長期的な課程を分析し」（野口）ました。時間選好率という概念は、「現在」を「将来」に対して重視するかを表わす程度を表します。ラムゼイは、「将来を割り引くことは倫理的に許されない」という信念から、時間選好率を1（100%）とし、遠い将来も現在と同様の重要性をもつべきだと考えました。経済学における時間の把握方法について、わたしの学部生時代のミクロ経済学のテキストとして「バイブル」であった岩波書店『価格理論I』（今井賢一・宇沢弘文・小宮隆太郎・根岸隆・村上泰亮）では、『仮説の体系』である理論モデルを構成するにあたって、「時間的要素についての抽象化をどのように行なうかに依存」して、「静学」と「動学」を区別するとあります。まず「与件」という考え方を定義します。「与件」とはその変化がどのようにして生じたかということが、一応、経済学の分析の対象とはされない『経済外的』な諸要因のことであるとします。

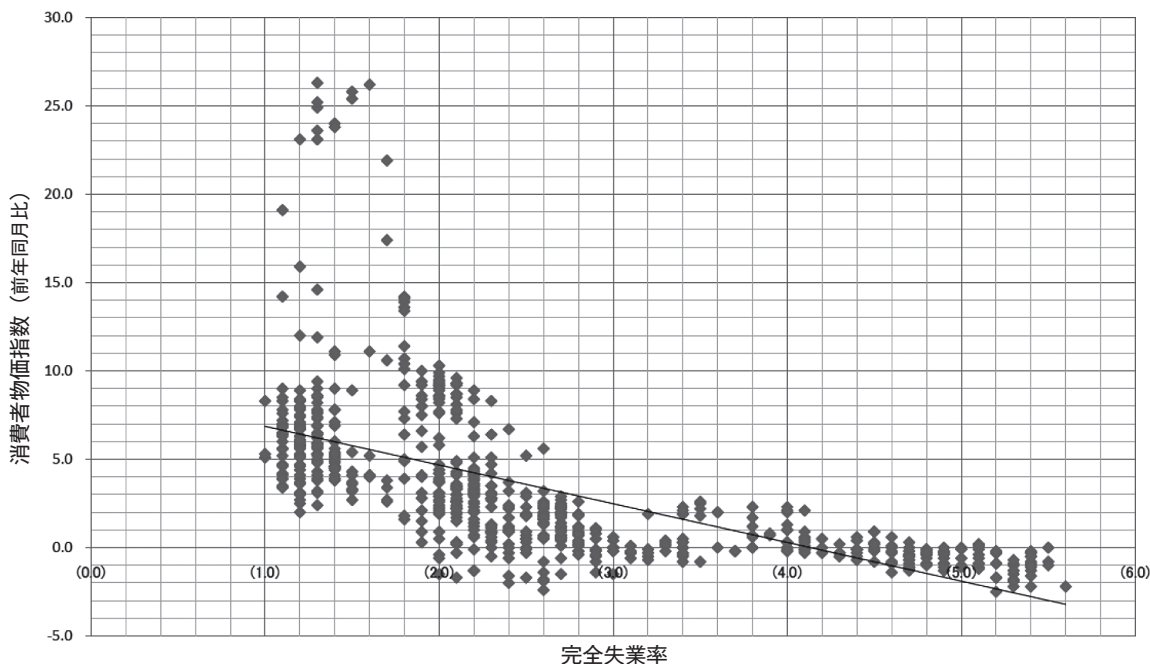
その上で、「静学の考え方は、まず時間を適当なながらに区切り、その区切られた時間単位」について、「その期間のなかでは与件が一定であり、そのときの与件に対応した均衡が成立すると考えるのである。そうしてさまざまな与件が変化するとき、個々の与件の変化が均衡にどのような影響を及ぼすかを分析する」、そのような分析方法を「比較静学」といいます。一方、「動学ではまず比較静学の場合と同じように、現実の変化のプロセスを適当な単位期間に区切り」、「経済変数に時間を付けて考え」ますが、「動学理論の特徴は、ある期から次の期へかけて、あるいはある時点から次の時点へかけての経済変数の連続的な変化のプロセスを、与件の変化によってでなく、それ自体変化の機構をもつものとして、説明しようとする点にある。すなわち、動学的理論モデルは、異なった時点での変数を本質的な形で含むものでなければならず、そのモデルに

よって経済変数の時間的な変化の経路を明らかにしようとするものである」と定義しています。

3. フィリップス曲線

三つめのおもしろい経済学は、フィリップスがイギリス経済に関して発見した経験則である「フィリップス曲線」です。横軸に失業率、縦軸にインフレ率をとり、現実の時系列データをプロットすると、右下がりの関係が見られるという法則です。ノーベル経済学賞を受賞したジョージ・アカロフ教授によると、「おそらく、マクロ経済変数の間の最も重要な相互依存関係は唯一、フィリップス曲線だろう」と指摘しています。わたしも同感です。日本のフィリップス曲線のグラフを見て下さい。データは、1953年から2010年までの月次の完全失業率（季節調整値、%）と消費者物価指数（総合）の前年同月比（%）です。線形の近似線に見られるように、きれいに右下がりの関係が見られます。1999年以降持続的にマイナスの値をとる消費者物価指数の動きは、デフレの状態を意味し、現在の日本経済はフィリップス曲線の右端に位置しています。

日本のフィリップス曲線
1953-2010年



IV おもしろ数学

1. 合理的期待形成

ジョン・ムースは、合理的期待形成仮説を次のように定式化しました。離散時間 t の関数である変数 x_t に関する $t + 1$ 時点における主観的期待値 x_{t+1}^e は、 t 時点における情報集合 Ω_t の下での数学的条件付き期待値 $E(x_{t+1}|\Omega_t)$ に等しい、つまり

$$x_{t+1}^e = E(x_{t+1}|\Omega_t) \quad (3)$$

が成立していると考えました。この数学的条件付き期待値とは、変数 x_{t+1} の情報集合 Ω_t の座標上

への写像を意味します。また、解析的には、合理的期待形成は、以下の予測の平方誤差を評価関数とする最小化問題の解として得られます。

$$\min_{x_{t+1}^e} E[(x_{t+1} - x_{t+1}^e)^2 | \Omega_t] = \min_{x_{t+1}^e} E\{[(x_{t+1} - E(x_{t+1} | \Omega_t)) - (x_{t+1}^e - E(x_{t+1} | \Omega_t))]^2 | \Omega_t\}$$

また、主観的共分散行列 Σ_{t+1}^e は、 $E\{(x_{t+1} - E(x_{t+1} | \Omega_t))(x_{t+1} - E(x_{t+1} | \Omega_t))\}^2 | \Omega_t$ に等しくなるように、変数 x_t に関する二次以上のモーメントについても、合理的期待形成仮説が規定します。

合理的期待形成仮説の必要条件として、二つが考えられます。ひとつは、直交性と呼ばれる以下の条件です。条件付き期待誤差 $\xi_{t+1} = x_{t+1} - E(x_{t+1} | \Omega_t)$ は、平均するとゼロになる

$$E(\xi_{t+1} | \Omega_t) = 0 \quad (4)$$

すなわち、予測量は、情報集合に含まれる任意の情報と直交する、 $x_{t+1}^e \perp \forall I_t \in \Omega_t$ という性質です。直交性の条件より、不偏性

$$E(\xi_{t+1}) = 0 \quad (5)$$

および効率性

$$E(\xi_{t+1} | x_t, x_{t-1}, \dots) = 0 \quad (6)$$

が成立します。さらに、もうひとつの必要条件は、系列無相関の性質です。条件付き期待誤差が情報集合内の情報、とりわけ過去の期待誤差と相関をもたない

$$E(\xi_{t+1} \xi_{t-i}) = 0 \quad \text{for } \forall i \quad (7)$$

という性質が成り立ちます。これらの必要条件について、経済主体の予測について訊ねる「サーベイ・データ」を用いて、検定することができます。

情報集合のなかには、マクロ経済を構成する構造モデルそのものも含まれるため、経済政策の変更が生じ構造が変化する場合に、経済主体の期待形成自体も変化します。したがって、その期待の変化を考慮しないで、政策変更の効果を計測することは意味がありません。こうしたルーカス批判と呼ばれる考え方は、合理的期待形成仮説の下での経済政策の効果に関する考え方を180度変えてしまいました。

2. 比較静学

時間を捉える方法について、先の『価格理論Ⅰ』では、「動学理論は、数学的なモデルとして定式化されたときには、モデルの中に少なくとも一つは微分方程式あるいは定差方程式などの変数の時間的変化にかんする関係を含み、そのモデルの解を求めることによって、経済変数を時間（および初期条件）の関数として表わすことのできるものであります。一方、比較静学では、与件となる経済外的要因の同定が必要です。数学的モデルにおいては、そのような変数を外生変数と呼び、モデルの解として解かれる内生変数と明確に区別されます。

たとえば、先の一般均衡理論では、内生変数である価格 p に加えて、価格に依存する需要 $x_{ij}(p)$ と供給 $y_{kj}(p)$ も内生変数ですが、第 i 番目の消費者の第 j 番目の財の初期保有量が \bar{x}_{ij} 、第 k 番目の企業の第 i 番目の消費者への利潤の分配（配当）の率 d_{ki} は、外生変数です。ここで、与件である外生変数 \bar{x}_{ij} の変化に関して比較静学分析を行います。一般均衡の体系である

$$\sum_i x_{ij}(p) - \sum_k y_{kj}(p) - \sum_i \bar{x}_{ij} = 0 \quad \text{for } \forall j = 1, \dots, m$$

について、内生変数である価格 p_j と外生変数である初期保有量 \bar{x}_{ij} に関して全微分します。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_i \frac{\partial x_{i1}}{\partial p_1} - \sum_k \frac{\partial y_{k1}}{\partial p_1} & \cdots & \sum_i \frac{\partial x_{i1}}{\partial p_m} - \sum_k \frac{\partial y_{k1}}{\partial p_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i \frac{\partial x_{im}}{\partial p_1} - \sum_k \frac{\partial y_{km}}{\partial p_1} & \cdots & \sum_i \frac{\partial x_{im}}{\partial p_m} - \sum_k \frac{\partial y_{km}}{\partial p_m} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} dp_1 \\ \vdots \\ dp_m \end{pmatrix} - \sum_i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_I \begin{pmatrix} d\bar{x}_{i1} \\ \vdots \\ d\bar{x}_{im} \end{pmatrix} = 0$$

$$A \begin{pmatrix} dp_1 \\ \vdots \\ dp_m \end{pmatrix} - \sum_i I \begin{pmatrix} d\bar{x}_{i1} \\ \vdots \\ d\bar{x}_{im} \end{pmatrix} = 0$$

このとき、第 i 番目の消費者の初期保有量 $\begin{pmatrix} d\bar{x}_{i1} \\ \vdots \\ d\bar{x}_{im} \end{pmatrix}$ だけが変化したときの価格の変化 $\begin{pmatrix} dp_1 \\ \vdots \\ dp_m \end{pmatrix}$ は、超過需要関数のヤコビ行列 A の逆行列 A^{-1} と外生変数の変化の積、 $A^{-1}I \begin{pmatrix} d\bar{x}_{i1} \\ \vdots \\ d\bar{x}_{im} \end{pmatrix}$ で表わされます。この

ように、比較静学では、解析で習う「全微分」・「偏微分」および線形代数で習う「行列」の知識を用います。

3. フィリップス曲線

この失業率とインフレ率の間の右下がりの関係が、単なる経験則なのか、それとも理論的なモデルによって表わされる構造をもっているのか、マクロ経済学は後者の考えに基づき、理論分析を深めてきました。右下がりの形状をもつフィリップス曲線の導出について、いくつかモデルがあります。

第一には、「ルーカスの島国経済モデル」です。ノーベル経済学賞を受賞したロバート・ルーカス教授は寓話の設定としての「島」(Island)によって、自らの場所で生じる情報は完全だが、他の場所で生じた情報は不完全にしか識別されない状況を作りだしました。情報の不完全な認識 (Misperception) は、マネーサプライなどマクロ経済集計量の変化が公表されたときに、その変化のうち、どれだけが自分の島固有の変化なのか、どれだけがすべての島に共通する変化なのかを識別することができないことから生じます。マクロ経済集計量が島を貫く共通した情報だけである場合には、一般均衡理論と同様、財貨・サービスの相対価格は不変となりますが、不完全な認識の下で、自分の島固有の情報だと誤って認識した場合には、それぞれの島において、労働供給などの意思決定がマクロ経済集計量の公表によって影響を受けます。具体的には、 t 時点の島 i におけるマネーサプライ m_t^i が次の過程にしたがっていると仮定します。

$$m_t^i = \gamma m_{t-1} + v_t + u_t + u_t^i$$

ここでは、1期前のマネーサプライ m_{t-1} に加えて、公表された情報 v_t のほか、その他公表されない情報 $u_t + u_t^i$ から構成されます。問題は、その他公表されない情報のうち、どれだけが島固有の情報 u_t^i であり、どれだけがすべての島に共通する情報 u_t かが識別できないことです。各情報の期待値、(共)分散が、以下のように与えられるとしましょう。

$$v_t \sim (0, \sigma_v^2), u_t \sim (0, \sigma_u^2), u_t^i \sim (0, \sigma_i^2)$$

このとき、島 i にいる経済主体は、シグナル抽出 (Signal extraction) という方法を用いて、島固有の情報とすべての島に共通する情報の割合を推定します。シグナル抽出という不完全な認識の下で、島 i 固有のマネーサプライがあると誤認識する場合には、島 i がその他の島に比べて相対的に高いインフレ率が発生し、実質賃金が低下すると判断するため、島 i にいる経済主体は

労働供給を減らします。その結果、失業率は低下する関係、すなわちフィリップス曲線が出現する訳です。

マネーサプライの過程を島に関して集計し、1期時点を前にずらすと、

$$m_{t+1} = \gamma m_t + v_{t+1} + u_{t+1}$$

島 i の情報集合の下での条件付き期待値をとると

$$\begin{aligned} E^i m_{t+1} &= E^i(\gamma m_t) \\ &= E^i[\gamma(\gamma m_{t-1} + v_t + u_t + u_t^i)] \\ &= \gamma^2 m_{t-1} + \gamma v_t + \gamma E^i u_t^i \end{aligned}$$

この式は、島 i にいる経済主体が $t+1$ 時点のマネーサプライを予測するとき、その他公表されない情報のうち、島 i 固有の情報 $u_t + u_t^i$ がどれだけかをシグナル抽出の方法によって識別しなければならないことを意味します。そこで、シグナル抽出によりますと、公表される情報 v_t 以外の公表されない情報 $u_t + u_t^i$ のうち、すべての島に共通する情報 u_t がどれだけなのかを、計量経済学で言う最小二乗法にしたがい推定します。

$$\begin{aligned} E^i u_t &= \kappa(u_t + u_t^i) \\ \kappa &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_i^2} \end{aligned}$$

この最小二乗推定量 κ は、島に共通する情報が支配的である場合 ($\sigma_u^2 \rightarrow +\infty$)、 $\lim_{\sigma_u^2 \rightarrow +\infty} \kappa = 1$ となり、島 i 固有の情報が支配的である場合 ($\sigma_i^2 \rightarrow +\infty$)、 $\lim_{\sigma_i^2 \rightarrow +\infty} \kappa = 0$ となります。

第二には、「テイラーの跛行的賃金決定」です。テイラーは、日本の労働慣行である「春闘」を他方で思い抱きながら、2期間続く賃金契約を定式化しました。欧米などでプロ・スポーツ選手に顕著に見られるように、5年契約など長期契約が一般的に見られますように、労働契約を長期にわたって取り結ぶことが背景にあります。今期新たに賃金契約を結ぶ労働者もいれば、前期に済ませた労働者もいますから、今期における平均の賃金は、それらを平均した水準になります。たとえ今期、景気が悪いからと言って、使用者が労働者の賃金を低下させたとしても、今期の平均賃金は、前期に決定した分を含む以上、急激には低下は致しません。つまり、賃金の硬直性が生まれる訳です。賃金が硬直的であれば、景気が悪くなり失業率が上昇して、実質賃金が低下しようとする、財貨、サービスの価格も低下して、実質賃金の低下を食い止めます。

一方、日本では、1年に一度、春先にすべての労働組合が一斉に「ベア」を呼びながら、賃金アップ・雇用確保を使用者から勝ち取るのが、春闘という慣行です。この慣行は、日本における賃金が欧米などに比べて相対的に伸縮的であることをもたらしているのでは、とテイラーは考えた訳です。より伸縮的な賃金の下では、フィリップス曲線の傾きは、より垂直になっている可能性があります。

具体的には、今期の平均賃金 w_t が、マークアップ率をゼロとして財貨・サービスの価格 P_t と等しく、今期の賃金 x_t と前期のそれ x_{t-1} の単純平均だとします。

$$P_t = w_t = \frac{x_t + x_{t-1}}{2}$$

今期賃金交渉を行う労働者にとって気になるのは、今後2期間にわたる平均「実質」賃金の水準 v_t です。平均実質賃金は、財貨・サービスの価格を P とし、今期の実質賃金 $x_t - P_t$ と来期のそれ $x_t - E_t(P_t + 1)$ の単純平均です。また、平均実質賃金の水準は、労働組合の交渉力などを通じて、

今期の景気 y_t など労働供給の要因によって決まり、景気と正の相関をします ($k > 0$)。

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{1}{2} [(x_t - P_t) + (x_t - E_t(P_{t+1}))] \\ &= x_t - \frac{1}{2} (P_t + E_t(P_{t+1})) \\ &= ky_t \end{aligned}$$

よって、平均物価水準 P_t は、

$$\begin{aligned} P_t &= w_t = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (P_t + E_t(P_{t+1})) + ky_t + \frac{1}{2} (P_{t-1} + E_{t-1}(P_t)) + ky_{t-1} \right] \\ &= \frac{1}{4} (P_t + E_t(P_{t+1}) + P_{t-1} + E_{t-1}(P_t)) + \frac{k}{2} (y_t + y_{t-1}) \\ &= \frac{1}{4} (2P_t + E_t(P_{t+1}) + P_{t-1} + \underbrace{E_{t-1}(P_t) - P_t}_{\eta_t}) + \frac{k}{2} (y_t + y_{t-1}) \\ &= \frac{1}{2} E_t(P_{t+1}) + \frac{1}{2} P_{t-1} + k(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2} \eta_t \end{aligned}$$

つまり、物価水準 P_t は、1期前の水準 P_{t-1} に依存し、硬直性を有することが示されます。失業率と景気 y_t が逆相関すると、この式より、物価水準 P_t と失業率も逆相関するフィリップス曲線が導かれます。

最後に、「カルボのランダムな価格機会の到来」のモデルを紹介します。近年の「ニューケインジアン・エコノミクス」と呼ばれる価格の硬直性に基づく金融政策の有効性を謳う学派が、決まって用いるモデルです。テイラーがアドホックな長期賃金契約を前提としていたのに対して、カルボは、差別化された財貨・サービスに関する独占的競争市場において、企業が価格設定する際、価格設定の機会がランダムにしか訪れないと想定します。每期、各企業に価格設定機会が訪れる確率を一定の値である q とします。企業が価格設定する際に考慮する損失関数は、最適な価格 P^* からのかい離の期待割引現在価値に等しいとします。

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (x_{t+j} - P_{t+j}^*)^2 &= \min \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j E_t (x_{t+j} - P_{t+j}^*)^2 \\ &= \min \left[\frac{1}{2} (x_t - P_t^*)^2 + \frac{1}{2} (1-q) \beta E_t (x_{t+1} - P_{t+1}^*)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

今期、機会の訪れた企業の設定する価格 x_t に関する最適化の一階条件は、

$$x_t \sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j - \sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j E_t P_{t+j}^* = 0$$

になります。よって、価格 x_t は、無限等比級数の公式を用いて、

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j E_t P_{t+j}^*}{\sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j E_t P_{t+j}^*}{\frac{1}{1-(1-q)\beta}} \\ &= [1-(1-q)\beta] \sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^j \beta^j E_t P_{t+j}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [1 - (1 - q)\beta]P_t^* + [1 - (1 - q)\beta] \sum_{j=1}^{\infty} (1 - q)^j \beta^j E_t P_{t+j}^* \\
&= [1 - (1 - q)\beta]P_t^* + [1 - (1 - q)\beta] \sum_{j=0}^{\infty} (1 - q)^{j+1} \beta^{j+1} E_t P_{t+1+j}^* \\
&= [1 - (1 - q)\beta]P_t^* + (1 - q)\beta E_t x_{t+1}
\end{aligned}$$

このとき、最適な価格 P_t^* は、各財貨・サービスに対する需要関数 y_t を所与として利潤を最大化する条件により、以下の式で決まるとします。 ω_t は供給に関するシフト・パラメータです。

$$P_t^* = P_t + \gamma y_t + \omega_t$$

カルボのモデルのすばらしい点は、企業が多数存在する場合に、個々の企業の価格設定機会の確率 q は、マクロ経済全体において価格調整を行う企業の割合に等しくなるという「大数の法則」が利用できる点です。したがって、一般物価水準 P_t は

$$P_t = qx_t + (1 - q)P_{t-1}$$

となります。これらを代入しますと、

$$\begin{aligned}
x_t &= [1 - (1 - q)\beta](P_t + \gamma y_t + \omega_t) + (1 - q)\beta E_t x_{t+1} \\
P_t &= q[1 - (1 - q)\beta](P_t + \gamma y_t + \omega_t) + (1 - q)\beta E_t [P_{t+1} - (1 - q)P_t] + (1 - q)P_{t-1} \\
&= q[1 - (1 - q)\beta](\gamma y_t + \omega_t) + (1 - q)\beta E_t \underbrace{\pi_{t+1}}_{P_{t+1} - P_t} + qP_t + (1 - q)P_{t-1} \\
\pi_t &= \beta E_t \pi_{t+1} + \frac{q[1 - (1 - q)\beta](\gamma y_t + \omega_t)}{1 - q}
\end{aligned}$$

この式は、インフレ率 π_t と失業率とが逆相関するフィリップス曲線を意味しています。

V 答え (つづく)

経済学と数学の間を往ったり来たりしながら、経済学という「社会科学の女王」を見てきました。どこまで読み進められましたか。最後まで読まれた方は、「おもしろ経済うつくし数学」という切っても切れない関係について気付かれたでしょう。切れないんです。切っちゃいけないんです。経済学を通して数学を、数学を通して経済学を学んでいかないと、本当の良さはわからないのだと思います。

経済学が社会問題の解決にとって役に立つものだと、いかなる意味において表象することができるか。その答えを師の言葉を頼りに探り究めてきた結果、何が見つかったか。その答えについて触れておきましょう。わたしの考える「ヒント」は三つあります。ひとつは、「経済学的思考」との脱却(岩井克人「『経済学的思考』について」『二つの経済学 対立から対話へ』根岸隆・山口重克編)です。もうひとつは、「政治」との付き合い(猪木武徳『デモクラシーと市場の論理』東洋経済新報社)です。三つめに、新しい公共経済学の確立(宇沢弘文『公共経済学を求めて』岩波書店)です。

残念ながら、紙幅が尽きてしまいました。続きは、上智大学経済学部のわたしの授業で少しづつ表明して行きたいと思っています。