日経 225 株価指数ボラティリティの金融危機時における HAR モデルを用いた構造変化の分析[†]

竹内（野木森）明香 *

概要

投資のリスクを表すボラティリティは証券価格の収益率の標準偏差として定義される。このボラティリティの推定量として、現在、高頻度データを使った推定量に注目が集まっている。この高頻度データから計算されるボラティリティを使用した金融危機時の構造変化の分析は、日次収益率を用いた分析に対し数少ない。そこで、本稿では、高頻度データから計算されるボラティリティを使用し、HAR モデルと AHAR モデルと呼ばれるモデルを用いて金融危機時に日本の株式市場のボラティリティが変化したかを検証した。これら二つのモデルは、ボラティリティの特徴である、長い自己相関と非対称性を捉えることができ、かつ、最小二乗法で簡単に推定できるという利点をもっている。分析の結果から、ボラティリティには構造変化があることが分かった。また、金融危機時には、長期のボラティリティに含まれる情報が重視されなくなることがわかった。しかし、構造変化をとりいれても、金融危機時のボラティリティの予測精度は向上しなかった。

キーワード：ボラティリティ、高頻度データ、日経 225 株価指数、HAR モデル

I　はじめに

投資のリスクを表す指標の一つとしてボラティリティがある。このボラティリティは証券価格の収益率の標準偏差として定義され、リスクマネジメントや、ポートフォリオ選択、デリバティブの価格付けに利用されている。しかし、ボラティリティは市場で取引されていないので、その値を何らかのデータから推定しなければならない。そのため、ボラティリティの正確な推定値を得る手法について広く研究がなされている。本稿では、2008 年の金融危機に着目し、大きな経済ショックが生じた際にボラティリティがどう変化するか、さらに、変化を考慮するか否かによって、ボラティリティの予測値がどの程度変化するか検証を行った。

ボラティリティの分析は、日次収益率を定式化したモデルから始まり、近年は高頻度データが利用可能となったので、それを用いた分析が注目されている。日次データを使用したボラティリティのモデルは、ARCH（autoregressive conditional heteroscedasticity）型モデルと SV（stochastic volatility）モデルが有名である。これらのうち、ARCH 型モデルは擬似最尤法を用いて簡単に推定できるため、実証分析で広く使われ多くの拡張モデルが提案されてきた。代表的なものに、Engle（1982）の提案した ARCH モデル、それを一般化した Bollerslev（1986）に

[†] 本稿に示されている意見は筆者個人に属し、また、ありうべき誤りは、すべて筆者個人に属する。

* 上智大学 経済学部 経済学科
連絡先　E-mail：asuka.takeuchi@sophia.ac.jp

よるGARCH（generalized ARCH）モデルや、Nelson（1991）によるEGARCH（exponential GARCH）モデル、Dinget al.（1993）によるAPGARCH（asymmetric power GARCH）モデル、Bollerslev and Mikkelsen（1996）によるFIEGARCH（fractionally integrated EGARCH）モデルなどがあげられる。しかし、日次データを使ったARCH型モデルではボラティリティを観測できない変数として扱うので、ボラティリティを直接に推定できず、どのモデルを用いるかによってボラティリティの推定値が異なる。

日次データによるボラティリティ・モデルと異なり、高頻度データを使えばボラティリティを直接推定でき、多くの推定量が提案されている。それらのうち代表的な推定量にRV（Realized Volatility）があげられる。このRVは、高頻度データから計算される日中収益率を単純に二乗して足し合わせ、その日のボラティリティとするものである。しかし、RVのような高頻度データから計算されるボラティリティだけでは、将来のボラティリティを予測し投資のための情報として利用することができない。そこで、時系列モデルを使ってボラティリティを予測する試みがなされている。RVの変動を表すモデルとして、ARFIMA（autoregressive fractionally integrated moving average）モデルや、Corsi（2009）によるHAR（heterogeneous autoregressive）モデル、Barndorff-Nielsen and Shephard（2001）によるUC（unobserved component）モデルなどが提案されている。Andersen et al.（2003）では、RVを直接モデル化したボラティリティの予測は、日次データを使用したGARCHモデルやSVモデルのものよりも精度が高いという結果が得られている。

いくつかの論文では、これら日次データや高頻度データを使用したボラティリティのモデルを用いて、2008年の金融危機に着目した実証分析がなされている。ARCH型モデルを使った実証分析では、次の論文があげられる。Celikkol et al.（2010）では、トルコの株価指数ISE-100を使って、リーマン・ブラザーズの破綻した2008年9月15日前後でデータを分割し、2008年3月4日から2008年9月14日と、2008年9月16日から2009年4月7日までのデータでARCHモデルとGARCHモデルを推定している。分析の結果、破綻前の期間に比べて、後半の期間でボラティリティが上昇したことを観測している。Karunanayake et al.（2010）では2008年の金融危機だけでなく、1997年に生じたアジア危機の分析も行っている。これら二つの危機の際に、オーストラリア、シンガポール、イギリス、アメリカの株価指数のボラティリティが、どの程度互いに影響を与えたかを多変量GARCHモデルで分析している。そこでは、危機の際に、収益率にはインパクトはないが、ボラティリティは上昇することが指摘されている。Abdelhedi-Zouch et al.（2011）は、1999年から2009年までの20か国の株価指数を用い、GARCHモデルとEGARCHモデルの説明変数に、他国の収益率の予測誤差の二乗（残差二乗）を説明変数として追加したAugmented GARCHモデルを推定し、金融危機時の他国の株価からの影響を分析している。そこでは、日本の株価指数が他国の影響を受けていることが示されている。Karunanayake et al.（2010）やAbdelhedi-Zouch et al.（2011）が示すように、各国の株価ボラティリティが他国の株価の影響を受けていることからも、2008年の金融危機は日本のボラティリティにも影響を与えている可能性がある。

以上のARCH型モデルを用いた分析に対し、高頻度データから計算されるボラティリティを使用した金融危機時の構造変化の分析は数少ない。Glezakos et al.（2011）ではギリシャ、ドイツ、アメリカの株価指数を分析し、2008年にRVが上昇したことを指摘しているが、RVの時系列モデルを使用した分析はなされていない。そこで、本稿では、高頻度データから計算されるボラティリティを使用し、金融危機時に日本の株式市場のボラティリティが変化したかを検証した。本稿で得られた結果は次の点である。分析の結果から、ボラティリティには構造変化があることが分かった。また、金融危機時には、長期のボラティリティに含まれる情報が重視されなくなる

ことがわかった。しかし、構造変化をとりいれても、金融危機時のボラティリティの予測精度は上昇しなかった。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2 節でボラティリティとRVについて解説を行う。3節ではボラティリティの特徴とHARモデルを、4節で推定に使用したデータを紹介する。5節では推定結果を示し、6節でまとめを行なう。

II　高頻度データを用いたボラティリティの推定量

ボラティリティとは、金融資産の収益率の標準偏差（もしくは分散）のことを指す。特に、株価を連続時間で定義したとき、そのボラティリティをIV（integrated volatility）と呼ぶ。この連続時間で定義されたボラティリティIVは、近年高頻度データが使用可能になったので、直接に推定することが可能となった。この推定量をRVと呼ぶ。本節ではIVの定義を行った後、IVの推定量であるRVを紹介する。

時刻sにおける対数株価が、以下の仮定に従っているものとする。

$$dp(s)=\mu(s)ds+\sigma(s)dW(s) \tag{1}$$

ここで、$W(s)$は標準ブラウン運動を表し、$\mu(s)$と$\sigma(s)$は時刻sに依存する関数である。いま、株式市場の取引終了時刻をtとし、前日の取引終了時刻を$t-1$とすると、区間（$t-1, t$）のボラティリティを以下のように定義することができる。

$$\sigma_t^2=\int_{t-1}^{t}\sigma^2(s)ds \tag{2}$$

(2)式のσ_tをt日のIV、もしくは真のボラティリティと呼ぶ。このIVは、株価が（1）式に従っている場合を想定しているので、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズによる価格変動などが含まれていない。したがって、この(2)式で示されるIVは、市場が効率的であるときのボラティリティと解釈することができる。

IVは高頻度データを使えば直接推定することができ、この推定量をRVと呼ぶ。例えば、日経225株価指数ならば、1分刻みの株価データがあり、そのデータから1分刻みの収益率を計算することができる。この高頻度の収益率を日中収益率と呼ぶ。いま、日中収益率が等間隔に得られる場合を想定し次のように表記する[1)]。

$$r(t-1+1/m),\ r(t-1+2/m),\ \ldots,\ r(t)$$

ここで、mは区間（$t-1, t$）に含まれる日中収益率の数を表している。t日のRVは、$t-1$時点からt時点の日中収益率の二乗の和として定義される。

$$\hat{\sigma}_t^2=\sum_{i=1}^{m}r(t-1+i/m)^2 \tag{3}$$

このとき$\hat{\sigma}_t^2$はσ_t^2の一致推定量である。

$$\operatorname*{plim}_{m\to\infty}\hat{\sigma}_t^2=\sigma_t^2$$

したがって、日中収益率の数mが増えるとRVはIVに近づくので、より多くの高頻度データが利用可能であるほどRVの予測精度が上昇する。

上記のようにt日の高頻度データを使えばRVでt日のIVを直接推定することができるが、将来のIVを予測したい時、予測時点では将来の高頻度データは得られないのでIVを予測することができない。ボラティリティの予測値はデリバティブの価格評価などに使用され、IVの予測値を

求めることは重要である。そこで、RV に時系列モデルを適用し将来のボラティリティの予測を行う試みがなされている。以下では単純化のため、$\hat{\sigma}_t^2$ にルートをとった $\hat{\sigma}_t$ を t 日の RV と呼ぶ。

III HAR モデル

RV の時系列モデルの一つとして、Corsi（2009）は、時間単位の異なるボラティリティを組み合わせた単純な AR 型モデルを提案した。このモデルを HAR モデルと呼ぶ。以下では、Corsi（2009）によって提案された HAR モデルの概要を説明する。

ボラティリティの時系列変動には、ボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる性質が存在することが指摘されている。ボラティリティ・クラスタリングとは、株価のボラティリティが時間を通じて変動し自己相関していることを捉えた性質である。先行研究ではボラティリティの自己相関は非常に強いことが知られている。さらに、このボラティリティ・クラスタリングは、自己相関の減衰速度によって短期記憶と長期記憶に分けることができ[2)]、ボラティリティが長期記憶過程に従っていることが、Andersen et al.（2001）、Andersen et al.（2003）、竹内（野木森）・渡部（2008）で指摘されている。

Corsi（2009）の提案した HAR モデルは長期記憶性を再現できることがシミュレーション結果から示されている。一方、長期記憶過程を表わすモデルとしてよく用いられるのが RV を用いた ARFIMA モデルと Barndorff-Nielsen and Shephard（2001）による UC モデル、日次データを用いた FIEGARCH モデルなどである。これら長期記憶モデルに対し Corsi（2009）は、長期記憶パラメータの推定が難しく、また、長期記憶過程なのか、それとも、自己相関が高い短期記憶過程の和かを区別することが難しいことを指摘している。既存のモデルと違い、HAR モデルは長期記憶モデルではないが、ボラティリティの長期記憶性を近似でき、さらに最小二乗法で簡単に推定できるという利点を持っている。

この HAR モデルは、不均一市場仮説（heterogeneous market hypothesis）を基にした ARCH 型モデルの一つである HARCH（heterogeneous interval ARCH）モデルを RV モデルへ拡張したものである[3)]。この仮説は、市場参加者が、市場の先行きに対する予測や、情報入手の程度など、様々な面において異なっているという仮説である。HGARCH モデルについて詳しくは Muller et al.（1997）、Dacorogna et al.（1998）を参照されたい。ここでは、市場には短期の投資を行っている投資家や長期の投資を行っている投資家など、異なる期間で投資を行っている投資家がいると仮定する。

Corsi（2009）は、投資する期間の長さが異なれば、情報に反応を示す時間の長さもそれに比例して異なると仮定し、異なる投資期間のボラティリティを組み合わせた HAR モデルを提案した。単純化のため、日次（短期）で取引を行なう投資家と、週次（中期）で投資のポジションを調整する投資家と、月次（長期）の投資期間を考える投資家の3種類の投資家がいるとする。短期の投資家は、新しい情報がはいれば、その日のうちにポートフォリオを再構築する。中期、長期の投資家は、短期の投資家よりも長い期間で投資を行なっているので、すぐに情報に反応するとは限らず、また、より長期に影響を与える情報に対してポートフォリオを再構築すると考えられる。従って、同じ情報であっても、投資家の投資期間によって反応が変わるので、短期と中期、長期のボラティリティが、将来のボラティリティに与える影響の度合いは変化する。以下では、日次 IV を $\sigma_t^{(d)}$、週次 IV を $\sigma_t^{(w)}$、月次 IV を $\sigma_t^{(m)}$ とする[4)]。

3期間の IV は観測出来ないが、以下の関数として定式化できると仮定する。本稿ではボラティリティの非負性を保証するため、対数をとったボラティリティを考えた。

$$\ln \sigma_{t+1}^{(m)} = c^{(m)} + \phi^{(m)} \ln RV_t^{(m)} + \omega_{t+1m}^{(m)} \tag{4}$$
$$\ln \sigma_{t+1}^{(w)} = c^{(w)} + \phi^{(w)} \ln RV_t^{(w)} + \gamma^{(w)} \mathrm{E}_t[\ln \sigma_{t+1}^{(m)}] + \omega_{t+1w}^{(w)}$$
$$\ln \sigma_{t+1}^{(d)} = c^{(d)} + \phi^{(d)} \ln RV_t^{(d)} + \gamma^{(d)} \mathrm{E}_t[\ln \sigma_{t+1}^{(w)}] + \omega_{t+1d}^{(d)}$$

ここで、誤差項 $\omega_{t+1d}^{(d)}$、$\omega_{t+1w}^{(w)}$、$\omega_{t+1m}^{(m)}$ は、平均がゼロで互いに独立な確率変数とする。$RV_t^{(d)}$、$RV_t^{(w)}$、$RV_t^{(m)}$ は日次、週次、月次の RV を示し、週次と月次の RV は以下で計算される。

$$RV_{t-1}^{(w)} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} RV_{t-i}^{(d)} \tag{5}$$

$$RV_{t-1}^{(m)} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} RV_{t-i}^{(d)} \tag{6}$$

いま、$\ln \sigma_t^{(d)}$ について整理すれば、モデルは以下のように書き換えられる。c、$\beta^{(d)}$、$\beta^{(w)}$、$\beta^{(m)}$ は (4) 式のパラメータの関数である。

$$\ln \sigma_{t+1}^{(d)} = c + \beta^{(d)} \ln RV_t^{(d)} + \beta^{(w)} \ln RV_t^{(m)} + \beta^{(m)} \ln RV_t^{(m)} + \omega_{t+1d}^{(d)}$$

一方、$t+1$ 期の RV と $\sigma_{t+1}^{(d)}$ には、日次の RV が日次の IV の不偏推定量であったことから以下の関係がある。

$$\ln \sigma_{t+1}^{(d)} = \ln RV_{t+1}^{(d)} + \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)} \tag{7}$$

ここで $\tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$ は予測誤差と解釈できる。この関係を使えば以下のように書き換えることができる。

$$\ln RV_{t+1}^{(d)} = c + \beta^{(d)} \ln RV_t^{(d)} + \beta^{(w)} \ln RV_t^{(m)} + \beta^{(m)} \ln RV_t^{(m)} + u_{t+1d} \tag{8}$$

ここで $u_{t+1d} = \omega_{t+1d}^{(d)} - \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$ とし、$u_t \sim (0, \sigma_u^2)$ とする。この (8) 式を推定する。

HAR モデルは、週次と月次の RV が日次の RV の過去の値の平均値であることから、20 という長い次数の AR モデルと捉えることができる。こうした長い次数を、3 つのパラメータで表現できるのが HAR モデルの特徴である。そこで、この (8) 式を HAR (3)-RV とも表記する。

HAR モデルのパラメータは最小 2 乗法で、また、σ_u^2 は残差分散として簡単に推定でき、推定量は漸近正規性を満たす。ただし、被説明変数に日次 RV を使っているので、誤差項に自己相関が存在する可能性が高い。この問題について、柴田 (2007)、Corsi (2009) では、Newey-West による標準誤差を用いて推定値の修正を行なっている。本稿の分析でも Newey-West による修正を行い、ラグの長さを $h=10$ として修正を行なった。

ボラティリティには、前述のボラティリティ・クラスタリングだけでなく、株価が下がった翌日のほうが上がった翌日よりも大きくなるという性質が知られており、これをボラティリティの非対称性と呼ぶ。しかし、(8) 式の HAR モデルでは、この性質は捕らえられていない。非対称性を取り入れた HAR モデルは、Giot and Laurent (2004)、渡部・佐々木 (2006)、Ubukata and Watanabe (2011) で分析されている。そこで、非対称性を取り入れた AHAR (Asymmetric HAR) モデルの推定も行なう。

本稿では、Hansen et al. (2011) と同様に非対称性を考慮する。基準化された残差 z_t を使って関数 $\tau(z_t)$ を次のように定義する。

$$\tau(z_t) = \tau_1 z_t + \tau_2 (z_t^2 - 1) \tag{9}$$

基準化残差については Louzis et al. (2010) に従い、$z_t^{(d)} = R_t / RV_t^{(d)}$ として計算した。ここで、R_t は日次の株価収益率である。関数 $\tau(z_t)$ は、$\mathrm{E}(z_t) = 0$ と $\mathrm{Var}(z_t) = 1$ が満たされるとき、常に $\mathrm{E}(\tau(z_t)) = 0$ が満たされる。

この $\tau(z_t)$ を含んだ AHAR モデルは、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\ln\sigma_{t+1}^{(m)} &= c^{(m)} + \phi^{(m)}\ln RV_t^{(m)} + \omega_{t+1m}^{(m)} \\
\ln\sigma_{t+1}^{(w)} &= c^{(w)} + \phi^{(w)}\ln RV_t^{(m)} + \gamma^{(w)}\mathrm{E}_t[\ln\sigma_{t+1}^{(m)}] + \omega_{t+1w}^{(w)} \\
\ln\sigma_{t+1}^{(d)} &= c^{(d)} + \phi^{(d)}\ln RV_t^{(d)} + \gamma^{(d)}\mathrm{E}_t[\ln\sigma_{t+1}^{(w)}] + \tau(z_t) + \omega_{t+1d}^{(d)}
\end{aligned} \tag{10}$$

モデルは $\ln\sigma_{t+1}^{(d)}=\ln RV_{t+1}^{(d)}+\tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$ から、以下のように書き換えられる。

$$\ln RV_{t+1}^{(d)} = c + \beta^{(d)}\ln RV_t^{(d)} + \beta^{(w)}\ln RV_t^{(m)} + \beta^{(m)}\ln RV_t^{(m)} + \tau(z_t) + u_{t+1d} \tag{11}$$

この関数 $\tau(z_t)$ は $\tau_1<0$ であれば z_t が負のとき、$z_t>0$ のときより値が大きくなる。従って、$\tau_1<0$ であれば、収益率が負の時、収益率が正の時よりもボラティリティが大きくなるので、ボラティリティの非対称性が観測される。τ_2 の符号は非対称性に影響を与えない。本稿では AHAR モデルとして (11) 式を推定する[5)]。

IV データ

本稿では、Oxford 大学の「Oxford-Man Institute's realized library's version 0.2」(以下 OMI、http://realized.oxford-man.ox.ac.uk)で公開されているデータを使用した。OMI には2種類のボラティリティ・データが収録されており、本稿では Shephard and Sheppard (2010) に使用されているデータを用いた。計算方法の詳細は OMI のホームページと Shephard and Sheppard(2010) を参照にされたい。HAR モデルと AHAR モデルの推定では、2005年1月5日から2009年2月27日までの1010期間に対応する日経225株価指数の収益率と日次、週次、月次の RV を使用した。より正確には、週次と月次の RV を計算するために過去5営業日前もしくは過去20営業日前の RV を使用しているので、2005年1月5日の20営業日前からの日次 RV データを使用している。さらに、リーマン・ブラザーズが破綻した2008年9月15日を境とし構造変化を考える。この日以前を構造変化前とし、この日以降を構造変化後として表記する。

ここで、RV によって IV を推定する際に、現実の株価データが (1) 式とは異なると幾つか問題が生じる。現実の株価データが受ける影響の1つとして、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ(以下 MS ノイズ)が挙げられる(Campbell et al., 1997, Ch3)[6)]。もし MS ノイズが存在した場合、日中収益率に自己相関が生じてしまい、結果として、RV は IV だけでなく MS ノイズの分散も含んでしまう。従って、RV は IV の不偏推定量ではなくなる。そのとき、HAR モデルの導出で使われた $\ln\sigma_{t+1}^{(d)}=\ln RV_{t+1}^{(d)}+\tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$ の仮定が満たされなくなる。この MS ノイズの影響を取り除く方法の1つとして、カーネル推定量による修正方法が提案されている(Hansen and Lunde, 2006, Barndorff-Nielsen et al., 2008, Bandi et al., 2008)。特に、Barndorff-Nielsen et al. (2008) によって提案された推定量を RK (realized kernel) と呼ぶ[7)]。日経225株価指数の高頻度データにも MS ノイズが含まれている可能性があるので、RV だけでなく RK のデータも使用して HAR モデルの推定を行なった。RK も OMI のデータを使用している。

表1に、各データの基本統計量を示している。表より、全期間の収益率 R_t の平均値は負の値となったが、構造変化前には平均値が正の値をとっている。構造変化の前後で、収益率の平均値が正の値から負の値に変わったことが確認できる。また、収益率の分散も、構造変化前は0.0128 であったが構造変化後には0.0387となり、分散の値が増加していることも同時に確認できる。次に、対数をとった RV と RK の平均値は構造変化後に上昇している。表より、日次、週次、月次のボラティリティの平均値が、構造変化前は−9.8程度であったが、構造変化後は−8.1程度に上昇した。

これらは、収益率の分散の変化と整合的である。以上の結果から、金融危機の前後でボラティリティが構造変化している可能性がある。

表 1　基本統計量

	全期間		構造変化前		構造変化後	
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	平均	標準偏差
R_t	−0.0004	0.0175	0.0001	0.0128	−0.0045	0.0387
$\ln RV_t^{(d)}$	−9.763	0.986	−9.954	0.811	−8.151	0.849
$\ln RV_t^{(w)}$	−9.689	0.917	−9.881	0.723	−8.065	0.767
$\ln RV_t^{(m)}$	−9.643	0.863	−9.834	0.652	−8.033	0.742
$\ln RK_t^{(d)}$	−9.753	0.990	−9.943	0.813	−8.142	0.880
$\ln RK_t^{(w)}$	−9.669	0.915	−9.862	0.716	−8.043	0.791
$\ln RK_t^{(m)}$	−9.619	0.859	−9.811	0.641	−8.004	0.763

全期間の標本数が 1010、構造変化前の標本数が 903、 構造変化後の標本数が 107。

V　推定結果

2005 年から 2009 年の全てのデータを使用して HAR モデルと AHAR モデルを推定した。**表 2** より、過去の RV もしくは RK の係数は、有意水準 5% で有意に推定されている。先行研究では、投資期間が長いボラティリティの係数のほうが有意に推定されることが多いが、本稿のデータでは、日次のボラティリティの係数 $\beta^{(d)}$ の値が比較的大きな値として推定されている。

表 2　推定結果（構造変化を考慮しないモデル）

	HAR		AHAR	
	RV	RK	RV	RK
c	−0.581*	−0.658*	−0.530*	−0.619*
	(0.199)	(0.215)	(0.204)	(0.221)
$\beta^{(d)}$	0.472*	0.443*	0.429*	0.403*
	(0.038)	(0.039)	(0.041)	(0.042)
$\beta^{(w)}$	0.240*	0.238*	0.289*	0.284*
	(0.051)	(0.052)	(0.053)	(0.053)
$\beta^{(m)}$	0.233*	0.258*	0.234*	0.256*
	(0.040)	(0.042)	(0.038)	(0.040)
τ_1			−0.0005*	−0.001*
			(0.0001)	(0.0001)
τ_2			0.000001*	0.0000005*
			(0.0000001)	(0.0000001)

括弧内の数値は標準誤差、* は有意水準 5% で有意なパラメータを示す。

次に、ボラティリティの非対称性をあらわす係数 τ_1 は、RV でも RK でも負の値で有意水準 5% で有意に推定されている。日経 225 株価指数のボラティリティには非対称性があることが指摘されており、この結果は先行研究とも整合的である。

RV の推定結果と RK の推定結果の間には、大きな違いがなかった。もし、日経 225 株価指数の高頻度データに重大な MS ノイズが存在すれば、RV と RK のデータは大きく異なるだろう。しかし、どちらのデータを使って推定しても、HAR モデルと AHAR モデルの推定パラメータに大きな違いがないことから、この期間の日経 225 株価指数データでは、MS ノイズの影響を取り除くか否かは、ボラティリティ・モデルの推定に大きな影響を与えないといえる。

ここで、構造変化をモデルに考慮するために、構造変化後の期間に 1 をとり、そのほかの期間に 0 をとるダミー変数 D_t を定義する。構造変化を考慮した HAR モデルでは、全ての説明変数にダミー変数を掛け合わした項を加え、次のモデルを推定している。

$$\ln RV_{t+1}^{(d)} = c + c'D_t + (\beta^{(d)} + \beta^{(d)\prime}D_t)\ln RV_t^{(d)} + (\beta^{(w)} + \beta^{(w)\prime}D_t)\ln RV_t^{(w)} + (\beta^{(m)} + \beta^{(m)\prime}D_t)\ln RV_t^{(m)} + u'_{t+1d} \quad (12)$$

このとき、以下の仮説に対し構造変化の F 検定を行なった。

$$\begin{cases} H_0: c' = \beta^{(d)\prime} = \beta^{(w)\prime} = \beta^{(m)\prime} = 0 \\ H_1: H_0 \text{ではない} \end{cases}$$

H_0 の下で F 統計量は以下の分布に従う。

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i'^{\,2}\right)/G}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i'^{\,2}/(n-k)} \sim F(G,\ n-k) \quad (13)$$

ここで G は制約の数で $G=4$、n はデータの数で 1009（＝1010－1）、k は推定パラメータの数で $k=8$、$\hat{u}_i$ は (8) 式の残差、$\hat{u}_i'$ は (12) 式の残差である。以上から、F 統計量は自由度（4, 1001）の F 分布に従う。AHAR モデルについても同様に、ダミー変数を使ったモデルを推定し、$c' = \beta^{(d)\prime} = \beta^{(w)\prime} = \beta^{(m)\prime} = \tau_1' = \tau_2' = 0$ を帰無仮説とした F 検定を行なった。この場合は、制約の数が $G=6$、推定パラメータの数が $k=12$ となるので、F 統計量は自由度 (6, 997) の F 分布に従う。

構造変化を考慮した HAR モデルと AHAR モデルの推定結果を**表 3** に纏める。全ての変数が変化したかを検定した F 値は、RV と RK の両方のデータで、HAR モデルと AHAR モデルの両方で、有意水準 5% で棄却された。このことから、ボラティリティには構造変化が起きていると考えられる。これは、先行研究の結果と整合的である。

構造変化について詳細にみるために、構造変化後の各係数の変化をみてみると、有意水準 5% で $\beta^{(m)\prime}$ が負の値で有意に推定されていることがわかる。この月次のボラティリティの変化を考慮すると、月次ボラティリティの影響は変化前に比べて小さくなり、RV の HAR モデルでは 0.030（＝0.242－0.212）、AHAR モデルでは 0.040（＝0.246－0.206）であり、RK の HAR モデルでは 0.044（＝0.262－0.218）、AHAR モデルでは 0.043（＝0.264－0.221）である。さらに週次と日次の係数 $\beta^{(d)\prime}$ と $\beta^{(w)\prime}$ は、有意水準 5% で有意ではないが正の値になっていること、$\beta^{(d)}$ と $\beta^{(w)}$ の値が 0.4 と 0.2 程度であることから、これらの月次ボラティリティの係数の値は、週次と日次のボラティリティの係数の値と比べると小さい。以上から、金融危機の直後から、長期のボラティリティの情報のウェイトが小さくなったことが確認できる。

表 3　推定結果（構造変化を考慮したモデル）

	HAR		AHAR	
	RV	RK	RV	RK
c	−0.840*	−0.963*	−0.767*	−0.904*
	(0.260)	(0.286)	(0.257)	(0.284)
$\beta^{(d)}$	0.454*	0.427*	0.403*	0.381*
	(0.039)	(0.040)	(0.041)	(0.041)
$\beta^{(w)}$	0.224*	0.219*	0.280*	0.270*
	(0.054)	(0.055)	(0.054)	(0.055)
$\beta^{(m)}$	0.242*	0.262*	0.246*	0.264*
	(0.047)	(0.048)	(0.044)	(0.045)
τ_1			−0.0005*	−0.001*
			(0.0001)	(0.0001)
τ_2			0.0000005*	0.0000004*
			(0.0000001)	(0.0000001)
c'	−0.616	−0.565	−0.560	−0.585
	(0.528)	(0.567)	(0.564)	(0.604)
$\beta^{(d)'}$	0.074	0.056	0.121	0.078
	(0.130)	(0.134)	(0.138)	(0.146)
$\beta^{(w)'}$	0.042	0.070	−0.003	0.048
	(0.123)	(0.114)	(0.135)	(0.134)
$\beta^{(m)'}$	−0.212*	−0.218*	−0.206*	−0.221*
	(0.100)	(0.109)	(0.097)	(0.108)
τ_1'			0.0001	0.0001
			(0.0003)	(0.0003)
τ_2'			0.0000003	−0.000001
			(0.000001)	(0.000001)
F 値	3.270*	2.680*	2.370*	2.260*

括弧内の数値は標準誤差、＊ は有意水準 5% で有意なパラメータを示す。

最後に、HAR モデルと AHAR モデルを使用して、ボラティリティの 1 期先予測を行なった。1 期先予測は具体的には次の手順に従う。まず 2007 年 1 月 25 日の日次ボラティリティを予測したい場合は、その 1 営業日前の 2007 年 1 月 24 日から 500 営業日前のデータを用いて HAR モデルと AHRA モデルを推定し、推定したパラメータを使って予測値を計算する。単純な HAR モデルの場合は、2007 年 1 月 25 日を $t+1$ 時点とすれば、予測値 $\hat{X}_{t+1}^{(d)}$ を下記のように表記できる。

$$\hat{X}_{t+1}^{(d)} = \hat{c} + \hat{\beta}^{(d)} \ln RV_t^{(d)} + \hat{\beta}^{(w)} \ln RV_t^{(m)} + \hat{\beta}^{(m)} \ln RV_t^{(m)} \tag{14}$$

ここで、$\hat{c}$、$\hat{\beta}^{(d)}$、$\hat{\beta}^{(w)}$、$\hat{\beta}^{(m)}$ は OLS によって得られた推定値である。また、非対称性の関数 $\tau(z_t)$ は期待値がゼロになるので予測値に影響を与えない。翌営業日の 2007 年 1 月 26 日のボラティリティを予測したい場合は、2007 年 1 月 25 日から 500 営業日前のデータを使用して、再び HAR モデルと AHAR モデルを推定し予測値を計算する。以上のように、予測したい日ごとにデータ期間をずらし、HAR モデルと AHAR モデルを推定し 1 期先予測を行った。予測したデータ期間は、

構造変化前は2007年1月25日から2008年8月29日まで、構造変化後は変化直後のデータを除き、2008年11月4日から2009年1月29日までの1期先予測を行っている。

予測精度の比較のためにMSE（Mean Squared Errors）を計算した。

$$MSE=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{X}_i-X_i\right)^2$$

ここで、その日の対数RVもしくはRKのデータをX_iとし、予測値を$\hat{X}_i$、予測したデータ数をNとする[8)]。**表4**の結果より、構造変化を区別せず期間全体でみれば、HARモデルよりもAHARモデルのほうが予測精度が上昇することがわかる。また、金融危機以前の期間でも、HARモデルよりもAHARモデルのほうがボラティリティの予測精度が高い。ボラティリティの非対称性をモデルに取り入れることで予測精度が上がるという結果は、先行研究と整合的である。しかし、金融危機後では、AHARモデルよりもHARモデルのほうが将来のボラティリティの予測精度が高くなるとはいえなかった。また、構造変化を考慮したモデルと考慮していないモデルで予測精度を比較しても、構造変化を考慮することで予測精度があがるとは確認できなかった。以上の結果から、ボラティリティが安定的に推移している期間では、ボラティリティの非対称性を考慮することで予測精度があがるといえるが、金融危機のように市場が大きく変動している期間では、ボラティリティの非対称性や構造変化を考慮することで予測精度が上昇するとはいえない。

表4　予測結果：MSE

	モデル	合計	変化前	構造変化後	
				SCなし	SC
RV	HAR	0.226	0.218	0.280	0.336
	AHAR	0.215	0.205	0.284	0.356
RK	HAR	0.265	0.256	0.326	0.389
	AHAR	0.253	0.242	0.329	0.399

予測を行なったデータ数は、全体で448日、構造変化前は393日、
構造変化後は55日。SCは構造変化を表す。

VI　まとめ

本稿では、OMIで公開されている高頻度データから計算されたRVとRKのデータを用いて、2009年の金融危機時に着目し、ボラティリティの構造変化の検定を行なっている。本稿で扱ったHARモデルとAHARモデルは、ボラティリティの長い自己相関と非対称性を捉えることができるモデルであり、かつ、最小二乗法で簡単に推定できるという利点をもっている。HARモデルとAHARモデルの推定結果から、日経225株価指数のボラティリティには有意な非対称性があり、F検定による構造変化の検定結果から、ボラティリティには有意な構造変化が生じていることが確認された。特に、月次のボラティリティの係数に有意な構造変化が生じていることが確認できる。この構造変化を考慮すると、金融危機時には、将来のボラティリティに対するウェイトは、日次と週次のボラティリティのほうが大きく、月次のボラティリティのウェイトは小さくなっている。従って、金融危機以降は長期よりも短期の情報が重視されるようになったと解釈できる。ただし、金融危機以降は、構造変化やボラティリティの非対称性をモデルに取り入れてもボラティリティの予測精度は上がらないという結果も得られている。

今後の課題として、いくつかの点をあげたい。本稿では先行研究に従って、ボラティリティの構造変化時点をリーマン・ブラザーズの破綻日として既知とした。しかし、このアメリカ発の金融危機に関するニュースは、リーマン・ブラザーズ破綻日以前から流れており、そのため、リーマン・ブラザーズの破綻日以前からボラティリティに影響を与えていた可能性がある。例えば、Liu and Maheu (2008) は構造変化を未知とした HAR モデルをベイズ推定している。このように、構造変化が未知である HAR モデルを推定し、本稿の結果と比較する必要があるだろう。次に本稿で HAR モデルの誤差項の分散は一定と仮定しているが、誤差項の分散（ボラティリティのボラティリティ）も時間に通じて変動していることが指摘されている。そこで、Corsi et al. (2008) は、HAR モデルの誤差項の分散を GARCH モデルによって定式化した HAR-GARCH モデル、Louziset al. (2010) は誤差項の分散を FIGARCH モデルとした HAR-FIGARCH モデルを推定している[9]。ボラティリティのボラティリティを考慮したとき本稿で得られた結論が変化するか検討する必要があるだろう。最後に、本稿では高頻度データから計算されたボラティリティだけを使って分析している。しかし、日次データと高頻度ボラティリティの両方のデータを使用したモデルとして、ARCH 型モデルを拡張した realized GARCH モデルが Hansen et al. (2011) によって、SV モデルを拡張した realized SV モデルが Takahashi et al. (2009) によって提案されている。日次データと高頻度データの両方のデータを用いてもボラティリティの構造変化が有意か検証を行う必要があるだろう。

注

1) 株価指数の高頻度データは等間隔に得られるが、個別株式の高頻度データは等間隔ではない。
2) 長期記憶性について詳しくは矢島 (2003) を参照のこと。
3) HGARCH モデルを分析したものに大塚 (2008) がある。
4) Corsi (2009) では、本稿の $\sigma_t^{(d)}$ のみを IV と呼び、$\sigma_t^{(w)}$、$\sigma_t^{(m)}$ を IV と呼ばず区別している。しかし本稿では、説明を簡略化するため、週次 IV と月次 IV と表記することとする。Corsi (2009) の定義とは異なるので注意されたい。
5) HAR モデルのその他の拡張として、日中収益率のジャンプを考慮したモデルも提案されている。Andersn et al. (2007) を参照のこと。
6) RV の計算上の問題点として、そのほかに、昼休みと夜間の取引が無い時間帯の調整方法、日中収益率のジャンプが挙げられる。本稿では、RV と RK のデータのみを使用するので、これらの問題点については考慮しない。
7) 通常のカーネル推定法については Andrews (1991) を参照のこと。
8) 本来 X_i には IV そのものを用いたいが、IV は観測できないので、代理変数として RV と RK を用いている。また、本来は、15 分刻みなどの長い日中収益率から計算される RV や RK を代理変数として用いるべきだが、OMI のデータベースには 5 分刻みの RV と RK データしかないので、このデータをそのまま用いている。
9) Ishida and Watanabe (2009) では、ARFIMA モデルの誤差項の分散を GARCH モデルによって定式化した ARFIMA-GARCH モデルを提案している。

参考文献

［1］ Abdelhedi-Zouch, M., M. B. Abbes, and Y. Boujelbene (2011) "Subprime crisis and volatility spillover," *International Journal of Monetary Economics and Finance,* Vol. 4, pp. 1-20.

［2］ Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and H. Ebens (2001) "The distribution of realized stock return volatility," *Journal of Financial Economics,* Vol. 61, No. 1, pp. 43-76.

［3］ Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys (2003) "Modeling and forecasting realized volatility," *Econometrica*, Vol. 71, No. 2, pp. 579-625.

［4］ Andersen, T. G., T. Bollerslev, and F. X. Diebold (2007) "Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility," *Review of Economics and Statistics,* Vol. 89, pp. 701-720.

［5］ Andrews, D. W. K. (1991) "Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation," *Econometrica,* Vol. 59, pp. 817-858.

［6］ Bandi, F. M., J. R. Russell, and C. Yang (2008) "Realized volatility forecasting and option pricing," *Journal of Econometrics,* Vol. 147, pp. 34-46.

［7］ Bardorff-Nielsen, O. E., P. Q. R. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard (2008) "Desining realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise," *Econometrica,* Vol. 76, pp. 1481-1536.

［8］ Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard (2001) "Non-Gaussian OU based models and some of ther uses in financial economics (with discussion)" *Journal of the Royeal Statistical Society,* Vol. 63, No. 2, pp. 167-241.

［9］ Bollerslev, T. (1986) "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics,* Vol. 31, pp. 673-659.

［10］ Bollerslev, T. and H. Mikkelsen (1996) "Modeling and pricing long memory in stock market volatility," *Journal of Econometrics,* Vol. 73, pp. 151-184.

［11］ Campbell, J. Y., A. W. Lo, and A. C. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*: Princeton University Press.

［12］ Celikkol, H., S. Akkoc, and Y. D. Akarim (2010) "The impact of bankruptcy of Lehman Brothers on the volatility structure of ISE-100 price Index," *Journal of Money, Investment and Banking,* Vol. 18.

［13］ Corsi, F. (2009) "A simple approximate long-memory model of realized volatility," *Journal of Financial Econometrics,* Vol. 7, pp. 174-196.

［14］ Corsi, F., S. Mittnik, C. Pigorsch, and U. Pigorsch (2008) "The volatility of realized volatility," *Econometric Reviews,* Vol. 27, pp. 46-78.

［15］ Dacorogna, M. M., U. A. Muller, R. D. Dav, R. B. Olsen, and O. V. Pictet (1998) "Modelling short-term volatility with GARCH and HARCH models," in Dunis, C. and Zhou. B. eds. *Nonlinear Modelling of High Frequency Financial Time Series,* pp. 161-176.

［16］ Ding, Z., C. W. J. Granger, and R. F. Engle (1993) "A long memory property of stock market returns and a new model," *Journal of Empirical Finance,* Vol. 1, pp. 83-106.

［17］ Engle, R. F. (1982) "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation," *Econometrica,* Vol. 50, pp. 987-1007.

［18］ Giot, P. and S. Laurent (2004) "Modelling daily value-at-risk using realized volatility and ARCH type models," *Journal of Empirical Finance,* Vol. 11, pp. 379-398.

[19] Glezakos, M., K. Vafiadis, and J. Mylonakis (2011) "Analysis of intra-day volatiltiy under econmic crisis conditions," *International Journal of Economics and Finance,* Vol. 3, pp. 60-69.

[20] Hansen, P. R. and A. Lunde (2006) "Realized variance and market microstructure noise," *Journal of Business and Economic Statistics,* Vol. 24, pp. 127-161.

[21] Hansen, P. R., A. Huang, and H. H. Shek (2011) "Realized GARCH: A joint model for returns and realized measures of volatility," *Journal of Applied Econometrics,* in press.

[22] Ishida, I. and T. Watanabe (2009) "Modeling and forecasting the volatility of the Nikkei 225 realized volatility using the ARFIMA-GARCH model," CARF Working Paper, CARF-F-145, Center for Advanced Research in Finance, University of Tokyo.

[23] Karunanayake, I., A. Valadkhani, and M. O'Brien (2010) "Financal cirises and international stock market volatility transmission," *Australian Economic Papers,* Vol. 49, pp. 209-221.

[24] Liu, C. and J. M. Maheu (2008) "Are there structural breaks in realized volatility?" *Journal of Financial Econometrics,* Vol. 6, pp. 326-360.

[25] Louzis, D. P., S. Xanthopoulos-Sisinis, and A. P. Refenes (2010) "Stock index realized volatility forecasting in the presence of heterogeneous leverage effects and long range dependence in the volatility of realized volatility," in *International Conference On Applied Economics,* pp. 465-477.

[26] Muller, U. A., M. M. Dacorognaa, R. F. Dave, R. B. Olsen, P. V. Pictet, and J. E. von Weizsacker (1997) "Volatilities of different time resolutions-Analyzing the dynamics of market components," *Journal of Empirical Finance,* Vol. 4, pp. 213-239.

[27] Nelson, D. B. (1991) "Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach," *Econometrica,* Vol. 59, pp. 347-370.

[28] Shephard, N. and K. Sheppard (2010) "Realising the future: forecasting with high frequency based volatility (HEAVY) models," *Journal of Applied Econometrics,* Vol. 25, pp. 197-231.

[29] Takahashi, M., Y. Omori, and T. Watanabe (2009) "Estimating stochastic volatility model using daily returns and realized volatility simultaneously," *Computational Statistics & Data Analysis,* Vol. 53, pp. 2404-2426.

[30] Ubukata, M. and T. Watanabe (2011) "Pricing Nikkei 225 options using realized volatility," IMES Discussions Paper Series, No. 2011-E-18, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.

[31] 大塚芳宏（2008）「異質的市場仮説によるボラティリティ変動モデルの拡張と予測精度の検証」、『現代ファイナンス』、第23巻、91-107頁。

[32] 竹内（野木森）明香・渡部敏明（2008）「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」、『現代ファイナンス』、第24巻、45-74頁。

[33] 矢島美寛（2003）「長期記憶をもつ時系列モデル」、刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓（編）『経済時系列の統計　その数理的基礎』、岩波書店、第2章、103-202頁。

[34] 渡部敏明・佐々木浩二（2006）「ARCH型モデル"Realized Volatility"によるボラティリティ予測とバリュー･アット･リスク」、『金融研究』、第25巻、第別冊第2号、39-79頁。

[35] 柴田舞（2007）「高頻度データによるボラティリティの推定：Realized Volatilityのサーベイと日本の株価指数および株価指数先物の実証分析」、Discussion Paper No. 2007-J-14。